

工学部専門科目「計算と論理」配布資料 練習問題集(1)

五十嵐 淳

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻

cal14@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

November 11, 2014

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を(問題番号・氏名とともに)白板に書く
2. 教員/TAによる講評
3. 1., 2. を繰り返す.

注意事項

- 小問単位で答えよ.
- 問題を解答する順番は問わない。(後の問題を最初に解いてよい.)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが、同時に解答を開始するのは構わない.
- 正答した場合は成績へ加える.

1 単純型付ラムダ計算

定義 1.1 (正規形) 項 M がこれ以上簡約できない, すなわち, $M \rightarrow N$ なる項 N が存在しない時, 項 M は正規形 (*normal form*) である, という.

定義 1.2 (正規化可能) 項 M が正規形に簡約できる, すなわち, $M \rightarrow^* N$ (ただし N は正規形) であるような N が存在する時, 項 M は正規化可能 (*normalizable*) である, または, M は正規形を持つ, という.

練習問題 1.1 項

$M = \text{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else (fun n : nat => n) 0}$

とする。 M は以下の3つの項

$M_1 = \text{(fun n : nat => plus n n) (S 0)}$

$M_2 = \text{if true then plus (S 0) (S 0) else (fun n : nat => n) 0}$

$M_3 = \text{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else 0}$

に簡約されうる。以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ。

小問 i : $M \rightarrow M_i$ の導出木を書け。

練習問題 1.2 M を $\text{fix f (x : nat) : nat := match x with 0 => 0 | S y => S (S (f y)) end}$ とする。

$M (S (S 0)) \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$

(ただし M_n は $S (S (\dots 0) \dots)$ の形) となる M_i を列挙せよ。

練習問題 1.3 Basics.v に登場した plus 関数を fix を使った項 M_{plus} で表すと以下ようになる。

$M_{plus} = \text{fix plus(m : nat) : nat := fun (n : nat) =>}$
 $\text{match m with 0 => y | S m' => S (plus m' n) end}$

($M_{plus} (S 0) (S 0)$ が簡約されて $S (S 0)$ になる過程を, $M_{plus} (S 0) (S 0) \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow S (S 0)$ なる M_i を列挙することで示せ。

練習問題 1.4 前問の M_{plus} は正規化可能ではないことを説明せよ。

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 M をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を N とするとき, $M \rightarrow^* N$ の導出木を書け。

練習問題 1.6 関係 $(\text{fun x : nat => x}) (S 0) \longleftrightarrow (\text{fun x : nat => S 0}) 0$ の導出木を書け。

練習問題 1.7 項

$(\text{fun c : nat -> bool -> nat => fun a : nat => (c a)}) (\text{fun b : nat => fun a : bool => b})$

の正規形を求めよ。

練習問題 1.8 以下の小問に答えよ。

- 練習問題 1.1 の項 M について, 型付け関係 $\vdash M : T$ が成立する T を見つけ, 型付け関係の導出木を書け。
 - (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 M_{i-1} について, 型付け関係 $\vdash M_{i-1} : T_{i-1}$ が成立する T_{i-1} を見つけ, 型付け関係の導出木を書け。

2 単純型付ラムダ計算+ペア

ペアで拡張した単純型付ラムダ計算を考える.

$$\text{(types)} \quad S, T ::= \dots \mid S \times T$$

$$\begin{aligned} \text{(terms)} \quad M, N ::= & \dots \mid (M_1, M_2) \\ & \mid \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} \end{aligned}$$

簡約規則

$$\text{match } (M_1, M_2) \text{ with } (x, y) \Rightarrow N[x, y] \text{ end} \longrightarrow N[M_1, M_2]$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : S \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash (M, N) : S \times T} \quad \text{(T-PAIR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 \times T_2 \quad \Gamma, x : T_1, y : T_2 \vdash N : S}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} : S} \quad \text{(T-PMATCH)}$$

練習問題 2.1 Lists.v で定義した fst に相当する項 Fst を書き,

1. 関係 $Fst(0, S\ 0) \longrightarrow^* 0$ の導出木を書け.
2. 型付け関係 $\vdash Fst : \text{nat} \times \text{nat} \rightarrow T$ が成立する T を見つけ, 導出を書け.

練習問題 2.2 以下の単純型付ラムダ計算の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような項 M を見つけ, 導出を書け. ただし, S, T, U は型とする.

1. $\vdash M : S \rightarrow T \rightarrow S$
2. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T) \rightarrow S \rightarrow U$
3. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S * T \rightarrow U)$
4. $\vdash M : (S * T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T \rightarrow U)$