工学部専門科目「計算と論理」配布資料
練習問題集 (2015 年度版)

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
cal15@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp
http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/

November 17, 2015

12/2(火) の授業時間を使って演習を行います．演習はもう一度くらい行う予定です．

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を (問題番号・氏名とともに) 白板に書く
2. 教員/TA による講評
3. 1., 2. を繰り返す．

注意事項

- 小問単位で答えよ．
- 問題を解答する順番は問わない．(後の問題を最初に解いてよい．)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが，同時に解答を開始するのは構わない．
- 正答した場合は成績へ加える．

1 単純型付ラムダ計算

定義 1.1 (正規形) 項 M がこれ以上簡約できない，すなわち，$M \longrightarrow N$ なる項 N が存在しない時，項 M は正規形 *(normal form)* である，という．

定義 1.2 (正規化可能) 項 M が正規形に簡約できる，すなわち，$M \longrightarrow^* N$ *(ただし* N *は正規形)* であるような N が存在する時，項 M は正規化可能 *(normalizable)* である，または，M は正規形を持つ，という．

練習問題 1.1 項

$$M = \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else (fun n : nat => n) O}$$

とする．M は以下の 3 つの項

$$\begin{aligned} M_1 &= \texttt{(fun n : nat => plus n n) (S O)} \\ M_2 &= \texttt{if true then plus (S O) (S O) else (fun n : nat => n) O} \\ M_3 &= \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else O} \end{aligned}$$

に簡約されうる．以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ．

小問 i: $M \longrightarrow M_i$ の導出木を書け．

練習問題 1.2 M を `fix f (x : nat) : nat := match x with O => O | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$M \texttt{ (S (S O))} \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n$$

(ただし M_n は `S (S (...O)...)` の形) となる M_i を列挙せよ．

練習問題 1.3 `Basics.v` に登場した `plus` 関数を `fix` を使った項 M_{plus} で表すと以下のようになる．

$$\begin{aligned} M_{plus} &= \texttt{fix plus(m : nat) : nat := fun (n : nat) =>} \\ &\qquad \texttt{match m with O => n | S m' => S (plus m' n) end} \end{aligned}$$

(M_{plus} `(S O)`) `(S O)` が簡約されて `S (S O)` になる過程を，M_{plus} `(S O) (S O)` $\longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow$ `S (S O)` なる M_i を列挙することで示せ．

練習問題 1.4 前問の M_{plus} は正規化可能ではないことを説明せよ．

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 M をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を N とするとき，$M \longrightarrow^* N$ の導出木を書け．

練習問題 1.6 関係 `(fun x : nat => x) (S O)` $\longleftrightarrow$ `(fun x : nat => S O) O` の導出木を書け．

練習問題 1.7 項

`(fun c : nat -> bool -> nat => fun a : nat => (c a)) (fun b : nat => fun a : bool => b)`

の正規形を求めよ．

練習問題 1.8 以下の小問に答えよ．

1. 練習問題 1.1 の項 M について，型付け関係 $\vdash M : T$ が成立する T を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

i. (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 M_{i-1} について，型付け関係 $\vdash M_{i-1} : T_{i-1}$ が成立する T_{i-1} を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.9 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{i} = 1, 2, 3$) の型付け関係の導出木をそれぞれ書け．

練習問題 1.10 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ の導出木を書け．

練習問題 1.11 練習問題 1.5 の項 $\boldsymbol{N}$ の型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.12 `plus (S O) (S (S O))` $\longleftrightarrow^*$ `plus (S (S O)) (S O)` の導出木を書け．

2 単純型付ラムダ計算＋ペア

ペアで拡張した単純型付ラムダ計算を考える．

$$\begin{array}{llll} \text{(types)} & \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} & ::= & \cdots \mid \boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \\ \\ \text{(terms)} & \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} & ::= & \cdots \mid (\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}) \\ & & \mid & \texttt{match } \boldsymbol{M} \texttt{ with } (\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y}) \texttt{ => } \boldsymbol{N} \texttt{ end} \end{array}$$

$$\texttt{match } (\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}) \texttt{ with } (\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y}) \texttt{ => } \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \texttt{ end} \longrightarrow \boldsymbol{N}[\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}] \qquad \text{(R-PMatch)}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{N} : \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash (\boldsymbol{M}, \ \boldsymbol{N}) : \boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}} \qquad \text{(T-Pair)}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T_1} * \boldsymbol{T_2} \qquad \boldsymbol{\Gamma}, \ \boldsymbol{x} : \boldsymbol{T_1}, \ \boldsymbol{y} : \boldsymbol{T_2} \vdash \boldsymbol{N} : \boldsymbol{S} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \notin dom(\boldsymbol{\Gamma}))}{\boldsymbol{\Gamma} \vdash \texttt{match } \boldsymbol{M} \texttt{ with } (\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y}) \texttt{ => } \boldsymbol{N} \texttt{ end} : \boldsymbol{S}} \qquad \text{(T-PMatch)}$$

練習問題 2.1 `Lists.v` で定義した `fst` に相当する項 Fst を書き，

1. 関係 Fst `(O, S O)` $\longrightarrow^*$ `O` の導出木を書け．
2. 型付け関係 $\vdash \mathit{Fst} : \texttt{nat} * \texttt{nat} \texttt{ -> } \boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

練習問題 2.2 以下の単純型付ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{M}$ を見つけ，導出を書け．ただし，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ は型とする．

1. $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{U}) \texttt{ -> } (\boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{T}) \texttt{ -> } \boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{U}$
3. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{U}) \texttt{ -> } (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{U})$
4. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{U}) \texttt{ -> } (\boldsymbol{S} \texttt{ -> } \boldsymbol{T} \texttt{ -> } \boldsymbol{U})$

3　多相ラムダ計算

$\boldsymbol{id}$ を項 `fun X : Type => fun x : X => x` とする．

練習問題 3.1

$$\boldsymbol{id}\ (\mathrm{nat} \texttt{->} \mathrm{nat})\ \texttt{S}\ (\boldsymbol{id}\ \mathrm{nat}\ \texttt{0}) \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は `S (S (...0)...)` の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

練習問題 3.2 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash$ `fun` X `: Type => fun` x `:` X `=> fun` y `:` X `=>` $x : \boldsymbol{T}$
2. $\vdash \boldsymbol{id}\ (\forall \texttt{Y : Type,Y -> Y})\ \boldsymbol{id} : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.3 項 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{S}$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \texttt{fun X : Type => fun x : X => x} \\
\boldsymbol{K} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y => x} \\
\boldsymbol{S} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun Z : Type =>} \\
&\qquad \texttt{fun x : X -> Y -> Z => fun y : X -> Y => fun z : X => x z (y z)}
\end{aligned}$$

このとき，以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_3}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T_1}$
2. $\vdash \boldsymbol{K} : \boldsymbol{T_2}$
3. $\vdash \boldsymbol{S} : \boldsymbol{T_3}$

練習問題 3.4 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ および，$\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ を見つけ，導出を書け．ただし，練習問題 3.3 で求めた導出と重複する部分は省略して良い．

$\vdash$ `fun` X `: Type =>` $\boldsymbol{S}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2}\ \boldsymbol{T_1}\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2})\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_1}) : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.5 多相ラムダ計算を使うと，ペアを次のように定義することが出来る．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{pair} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y =>} \\
&\qquad\qquad \texttt{fun Z : Type => fun Z : X -> Y -> Z => z x y}
\end{aligned}$$

また，このように定義したペアについての $\boldsymbol{fst}$ と $\boldsymbol{snd}$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{fst} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{p X (fun x : X => fun y : Y => x)}\\ \boldsymbol{snd} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{p Y (fun x : X => fun y : Y => y)}\end{aligned}$$

以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{pair} : \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{fst} : \boldsymbol{T}$
3. $\vdash \boldsymbol{snd} : \boldsymbol{U}$

練習問題 3.6 $\boldsymbol{pair}$, $\boldsymbol{fst}$, $\boldsymbol{snd}$ を練習問題 3.5 のように定義し，$\boldsymbol{p}$ を項 $\boldsymbol{pair}$ `nat bool 0 true` とする．このとき，

$$\boldsymbol{fst}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

となる $\boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{M_n}$ は正規形とする) を列挙せよ．また，

$$\boldsymbol{snd}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{N_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{N_m}$$

となる $\boldsymbol{N_i}$ (ただし $\boldsymbol{N_m}$ は正規形とする) を列挙せよ．

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．命題 $\neg\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P}$ -> $\bot$ の略記である．

1. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{p}$
2. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}$
3. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$
4. $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\neg\boldsymbol{p}$
5. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{q}$ -> $\neg\boldsymbol{p})$
6. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$

7. $\vdash (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$ -> $\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

8. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

9. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

10. $\vdash \neg\neg(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p})$

11. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p})$ -> $\neg\neg \boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{p}$

12. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

13. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$

14. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

15. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p})$

16. $\vdash (\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし `P`,`Q` は `nat -> Prop` 型の変数，`R` は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 (: T) は適宜省略する．

1. $\vdash$ (∀`x`,`P x`) -> (∃`y`,`P y`)
2. $\vdash$ (¬∃`x`,`P x`) -> ∀`y`,¬`P y`
3. $\vdash$ (∀`x`,¬`P x`) -> ¬∃`y`,`P y`
4. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` -> `Q x`)) -> ((∀`y`,`P y`) -> ∀`z`,`Q z`)
5. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` -> `Q x`)) -> ((∃`y`,`P y`) -> ∃`z`,`Q z`)
6. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` ∧ `Q x`)) -> (∀`y`,`P y`) ∧ (∀`z`,`Q z`)
7. $\vdash$ (∀`x`,`P x` ∨ ¬`P x`) ∧ (¬¬∀`y`,`P y`) -> ∀`z`,`P z`
8. $\vdash$ (∃`x`,`P x` ∨ `Q x`) -> (∃`y`,`P y`) ∨ (∃`x`,`Q x`)
9. $\vdash$ (∀`x`,`P x` -> `R`) -> (∃`y`,`P y`) -> `R`
10. $\vdash$ ((∃`y`,`P y`) -> `R`) -> (∀`x`,`P x` -> `R`)

6 日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ．(ただし，命題や関数の意味は Coq での定義によるとする．)

1. $\forall$`X : Type`,$\forall$`x y : list X`,`length(x ++ y)` $=$ `length x + length y` を示せ.
2. `bool` 上の排他的論理和を計算する関数 `xorb` を定義し，$\forall$`b c : bool`,`xorb b c` $=$ `andb b c` `->` `b = false` $\wedge$ `c = false` を示せ.
3. $\forall$`x y : nat`,`ev x` `->` `ev y` `->` `ev (x + y)` を `ev x` の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall$`x : nat`,$\forall$`y : nat`,$(\mathtt{x} = \mathtt{y} \vee \neg(\mathtt{x} = \mathtt{y}))$ を `x` についての帰納法を使って示せ.