

工学部専門科目「計算と論理」配布資料 練習問題集(2016年度版)

五十嵐 淳

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻

cal16@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

November 8, 2016

11/15(火)の授業時間を使って演習を行います。演習はもう一度くらい行う予定です。

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を(問題番号・氏名とともに)白板に書く
2. 教員/TAによる講評
3. 1., 2. を繰り返す。

注意事項

- 小問単位で答えよ。
- 問題を解答する順番は問わない。(後の問題を最初に解いてよい。)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが、同時に解答を開始するのは構わない。
- 正答した場合は成績へ加える。

1 単純型付ラムダ計算

定義 1.1 (正規形) 項 M がこれ以上簡約できない, すなわち, $M \rightarrow N$ なる項 N が存在しない時, 項 M は正規形 (*normal form*) である, という。

定義 1.2 (正規化可能) 項 M が正規形に簡約できる, すなわち, $M \rightarrow^* N$ (ただし N は正規形) であるような N が存在する時, 項 M は正規化可能 (*normalizable*) である, または, M は正規形を持つ, という。

練習問題 1.1 項

$M = \text{if true then } (\text{fun } n : \text{nat} \Rightarrow \text{plus } n \ n) \ (S \ 0) \ \text{else } (\text{fun } n : \text{nat} \Rightarrow n) \ 0$

とする. M は以下の 3 つの項

$M_1 = (\text{fun } n : \text{nat} \Rightarrow \text{plus } n \ n) \ (S \ 0)$

$M_2 = \text{if true then plus } (S \ 0) \ (S \ 0) \ \text{else } (\text{fun } n : \text{nat} \Rightarrow n) \ 0$

$M_3 = \text{if true then } (\text{fun } n : \text{nat} \Rightarrow \text{plus } n \ n) \ (S \ 0) \ \text{else } 0$

に簡約されうる. 以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ.

小問 i : $M \longrightarrow M_i$ の導出木を書け.

(この間中の plus は単なる変数である.)

練習問題 1.2 M を $\text{fix } f \ (x : \text{nat}) : \text{nat} := \text{match } x \ \text{with } 0 \Rightarrow 0 \mid S \ y \Rightarrow S \ (S \ (f \ y)) \ \text{end}$ とする.

$M \ (S \ (S \ 0)) \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n$

(ただし M_n は $S \ (S \ (\dots 0) \dots)$ の形) となる M_i を列挙せよ.

練習問題 1.3 Basics.v に登場した plus 関数を fix を使った項 M_{plus} で表すと以下のようになる.

$M_{plus} = \text{fix plus}(m : \text{nat}) : \text{nat} := \text{fun } (n : \text{nat}) \Rightarrow$
 $\text{match } m \ \text{with } 0 \Rightarrow n \mid S \ m' \Rightarrow S \ (\text{plus } m' \ n) \ \text{end}$

$(M_{plus} \ (S \ 0)) \ (S \ 0)$ が簡約されて $S \ (S \ 0)$ になる過程を, $M_{plus} \ (S \ 0) \ (S \ 0) \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow S \ (S \ 0)$ なる M_i を列挙することで示せ.

練習問題 1.4 前問の M_{plus} を使った項 $M_{plus} \ 0$ について無限簡約列 $(M_{plus} \ 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow \dots)$ があることを説明せよ.

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 M をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を N とするとき, $M \longrightarrow^* N$ の導出木を書け. (この間中の plus は単なる変数である.)

練習問題 1.6 関係 $(\text{fun } x : \text{nat} \Rightarrow x) \ (S \ 0) \longleftrightarrow (\text{fun } x : \text{nat} \Rightarrow S \ 0) \ 0$ の導出木を書け.

練習問題 1.7 項

$(\text{fun } c : \text{nat} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{nat} \Rightarrow \text{fun } a : \text{nat} \Rightarrow (c \ a)) \ (\text{fun } b : \text{nat} \Rightarrow \text{fun } a : \text{bool} \Rightarrow b)$

の正規形を求めよ.

練習問題 1.8 以下の小問に答えよ.

1. 練習問題 1.1 の項 M について, 型付け関係 $\vdash M : T$ が成立する T を見つけ, 型付け関係の導出木を書け.

- i. (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 M_{i-1} について, 型付け関係 $\vdash M_{i-1} : T_{i-1}$ が成立する T_{i-1} を見つけ, 型付け関係の導出木を書け.

練習問題 1.9 練習問題 1.1 の項 M, M_i (ただし $i = 1, 2, 3$) の型付け関係の導出木をそれぞれ書け.

練習問題 1.10 練習問題 1.1 の項 M をこれ以上簡約できなくなるまで簡約した結果得られる項を N とするとき, $M \longrightarrow^* N$ の導出木を書け.

練習問題 1.11 練習問題 1.5 の項 N の型付け関係の導出木を書け.

練習問題 1.12 $\text{plus } (S \ 0) \ (S \ (S \ 0)) \longleftarrow^* \text{plus } (S \ (S \ 0)) \ (S \ 0)$ が導出できることを説明せよ. (必ずしも導出木を全て書き下す必要はない.)

2 単純型付ラムダ計算+ペア

ペアで拡張した単純型付ラムダ計算を考える.

$$\text{(types)} \quad S, T ::= \dots \mid S * T$$

$$\begin{aligned} \text{(terms)} \quad M, N ::= & \dots \mid (M_1, M_2) \\ & \mid \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} \end{aligned}$$

$$\text{match } (M_1, M_2) \text{ with } (x, y) \Rightarrow N[x, y] \text{ end} \longrightarrow N[M_1, M_2] \quad (\text{R-PMATCH})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : S \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash (M, N) : S * T} \quad (\text{T-PAIR})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T_1 * T_2 \quad \Gamma, x : T_1, y : T_2 \vdash N : S \quad (x, y \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} : S} \quad (\text{T-PMATCH})$$

練習問題 2.1 Lists.v で定義した fst に相当する項 Fst を書き,

1. 関係 $Fst \ (0, S \ 0) \longrightarrow^* 0$ の導出木を書け.
2. 型付け関係 $\vdash Fst : \text{nat} * \text{nat} \rightarrow T$ が成立する T を見つけ, 導出を書け.

練習問題 2.2 以下の単純型付ラムダ計算の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような項 M を見つけ, 導出を書け. ただし, S, T, U は型とする.

1. $\vdash M : S \rightarrow T \rightarrow S$

2. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T) \rightarrow S \rightarrow U$
3. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S * T \rightarrow U)$
4. $\vdash M : (S * T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T \rightarrow U)$

3 多相ラムダ計算

id を項 $\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow x$ とする.

練習問題 3.1

$$id \text{ (nat } \rightarrow \text{ nat) } S \text{ (id nat 0)} \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n$$

(ただし M_n は $S (S (\dots 0) \dots)$ の形) となる M_i を列挙せよ.

練習問題 3.2 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような型 T を見つけ, 導出を書け.

1. $\vdash \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : X \Rightarrow x : T$
2. $\vdash id (\forall Y : \text{Type}, Y \rightarrow Y) id : T$

練習問題 3.3 項 I, K, S をそれぞれ以下のように定義する.

$$\begin{aligned} I &= \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow x \\ K &= \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : Y \Rightarrow x \\ S &= \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Z : \text{Type} \Rightarrow \\ &\quad \text{fun } x : X \rightarrow Y \rightarrow Z \Rightarrow \text{fun } y : X \rightarrow Y \Rightarrow \text{fun } z : X \Rightarrow x z (y z) \end{aligned}$$

このとき, 以下の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような型 T_1, T_2, T_3 を見つけ, 導出を書け.

1. $\vdash I : T_1$
2. $\vdash K : T_2$
3. $\vdash S : T_3$

練習問題 3.4 以下の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような型 T および, T_1, T_2 を見つけ, 導出を書け. ただし, 練習問題 3.3 で求めた導出と重複する部分は省略して良い.

$\vdash \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow S \ T_1 \ T_2 \ T_1 \ (K \ T_1 \ T_2) \ (K \ T_1 \ T_1) : T$

練習問題 3.5 多相ラムダ計算を使うと、ペアを次のように定義することが出来る。

```
pair = fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y =>
      fun Z : Type => fun Z : X->Y->Z => z x y
```

また、このように定義したペアについての *fst* と *snd* は次のように定義される。

```
fst = fun X : Type => fun Y : Type => fun p :  $\forall Z : \text{Type}, (X \rightarrow Y \rightarrow Z) \rightarrow Z$  =>
      p X (fun x : X => fun y : Y => x)
```

```
snd = fun X : Type => fun Y : Type => fun p :  $\forall Z : \text{Type}, (X \rightarrow Y \rightarrow Z) \rightarrow Z$  =>
      p Y (fun x : X => fun y : Y => y)
```

以下の型付け関係の判断について、判断が導出できるような型 S, T, U を見つけ、導出を書け。

1. $\vdash \textit{pair} : S$
2. $\vdash \textit{fst} : T$
3. $\vdash \textit{snd} : U$

練習問題 3.6 *pair*, *fst*, *snd* を練習問題 3.5 のように定義し、 p を項 *pair* nat bool 0 true とする。このとき、

$$\textit{fst} \text{ nat bool } p \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n$$

となる M_i (ただし M_n は正規形とする) を列挙せよ。また、

$$\textit{snd} \text{ nat bool } p \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_m$$

となる N_i (ただし N_m は正規形とする) を列挙せよ。

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け。命題 $\neg P$ は $P \rightarrow \perp$ の略記である。

1. $\vdash p \rightarrow q \rightarrow p$

2. $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$
3. $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$
4. $\vdash \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$
5. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
6. $\vdash \neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
7. $\vdash (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$
8. $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
9. $\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \rightarrow r)$
10. $\vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$
11. $\vdash (p \vee \neg p) \rightarrow \neg\neg p \rightarrow p$
12. $\vdash (p \vee q) \wedge r \rightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
13. $\vdash (p \wedge q) \vee r \rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
14. $\vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
15. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
16. $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け. ただし P, Q は $\text{nat} \rightarrow \text{Prop}$ 型の変数, R は Prop 型の変数とする. (文脈からも省略する.) 途中, 出てくる $\Gamma \vdash P : \text{Prop}$ の形の判断についての導出は省略してよい. また型宣言 ($: T$) は適宜省略する.

1. $\vdash (\forall x, P x) \rightarrow (\exists y, P y)$
2. $\vdash (\neg \exists x, P x) \rightarrow \forall y, \neg P y$
3. $\vdash (\forall x, \neg P x) \rightarrow \neg \exists y, P y$
4. $\vdash (\forall x, (P x \rightarrow Q x)) \rightarrow ((\forall y, P y) \rightarrow \forall z, Q z)$

5. $\vdash (\forall x, (P x \rightarrow Q x)) \rightarrow ((\exists y, P y) \rightarrow \exists z, Q z)$
6. $\vdash (\forall x, (P x \wedge Q x)) \rightarrow (\forall y, P y) \wedge (\forall z, Q z)$
7. $\vdash (\forall x, P x \vee \neg P x) \wedge (\neg \neg \forall y, P y) \rightarrow \forall z, P z$
8. $\vdash (\exists x, P x \vee Q x) \rightarrow (\exists y, P y) \vee (\exists x, Q x)$
9. $\vdash (\forall x, P x \rightarrow R) \rightarrow (\exists y, P y) \rightarrow R$
10. $\vdash ((\exists y, P y) \rightarrow R) \rightarrow (\forall x, P x \rightarrow R)$

6 日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ. (ただし, 命題や関数の意味は Coq での定義によるとする.)

1. $\forall X : \text{Type}, \forall x y : \text{list } X, \text{length}(x ++ y) = \text{length } x + \text{length } y$ を示せ.
2. bool 上の排他的論理和を計算する関数 xorb を定義し, $\forall b c : \text{bool}, \text{xorb } b c = \text{andb } b c \rightarrow b = \text{false} \wedge c = \text{false}$ を示せ.
3. $\forall x y : \text{nat}, \text{ev } x \rightarrow \text{ev } y \rightarrow \text{ev } (x + y)$ を $\text{ev } x$ の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall x : \text{nat}, \forall y : \text{nat}, (x = y \vee \neg(x = y))$ を x についての帰納法を使って示せ.