

## 工学部専門科目「計算と論理」2013年度 期末試験

実施日時: 2014年2月4日(火) 10:30~12:00, 担当: 五十嵐(淳)

問1(解答用紙1枚目表に解答) 命題論理の自然演繹の導出規則を使って以下の判断の導出を書け.

- (1)  $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (2)  $\vdash (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge r$
- (3)  $\vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$

問2(解答用紙1枚目裏に解答) 以下は、「自然数  $m$  は自然数  $n$  の二倍である」という関係を表す、帰納的に定義される命題 `twice n m` の Coq における定義である.

```
Inductive twice : nat -> nat -> Prop :=  
  | tw1 : ?  
  | tw2 : forall n m, twice n m -> twice (S n) (S (S m)).
```

- (1) ? を埋め, 定義を完成させよ.
- (2) この命題の定義を推論規則の形で表せ.
- (3) `twice 2 4` の証拠となる—すなわち `twice 2 4` という型を持つ—項を示せ.

問3(解答用紙2枚目に解答) Coq における以下の関数 `filter` と `f` の定義を考える.

```
Fixpoint filter {X :Type} (p : X -> bool) l :=  
  match l with  
  | [] => []  
  | x :: l' => if (p x) then x :: (filter p l')  
               else filter p l' end  
end.
```

```
Fixpoint f (n:nat) : natbool :=  
  match n with  
  | 0 => false  
  | S 0 => true  
  | S(S n') => f n'  
end.
```

- (1) `filter` の型は何か答えよ.
- (2) `Eval simpl in filter f [1; 2; 3; 4; 5; 6].` の結果得られる項  $[a_1, \dots, a_n]$  は何か答えよ.

- (3) `filter` に関する以下の性質 (A) が成立するような関数  $g: \text{bool} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{bool}$  の定義を与えよ.

性質 (A): 任意の型  $X$ , 関数  $p: X \rightarrow \text{bool}$ ,  $q: X \rightarrow \text{bool}$ , リスト  $l: \text{list } X$  について

$$\text{filter } p (\text{filter } q \ l) = \text{filter } (\text{fun } x \Rightarrow g \ (p \ x) \ (q \ x)) \ l$$

である.

- (4) リストについての帰納法とは何かを説明せよ.
- (5) 上で定義した  $g$  に対して性質 (A) が成立することを, リストについての帰納法を使い(日本語で)証明せよ.
- (6) `filter` に関する以下の性質 (B) が成立するよう関数  $g'$  の定義を与えよ. また,  $g'$  の型を答えよ.

性質 (B): 任意の型  $X$ , 関数  $p: X \rightarrow \text{bool}$ ,  $q: X \rightarrow \text{bool}$ , リスト  $l: \text{list } X$  について

$$\text{filter } p (\text{filter } q \ l) = \text{filter } (g' \ p \ q) \ l$$

である.