工学部専門科目「計算と論理」配布資料
練習問題集 (2019 年度版)

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
cal19@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp
http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/

November 15, 2019

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく
1. 練習問題の解答を (問題番号・氏名とともに) 白板に書く
2. 教員/TA による講評
3. 1., 2. を解答者がいなくなるか講義の時間が終了するまで繰り返す.

注意事項

- 小問単位で答えよ.
- 問題を解答する順番は問わない. (後の問題を最初に解いてよい.)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが，同時に解答を開始するのは構わない.
- 正答した場合は成績へ加える.

1 単純型付ラムダ計算

練習問題 1.1 項 M を以下のように定義する.

$$M = \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else (fun n : nat => n) O}$$

とする (plus は変数と考えよ.). M は以下の 3 つの項

$$\begin{aligned}
M_1 &= \texttt{(fun n : nat => plus n n) (S O)} \\
M_2 &= \texttt{if true then plus (S O) (S O) else (fun n : nat => n) O} \\
M_3 &= \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else O}
\end{aligned}$$

に簡約されうる．以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ．

小問 i: 簡約関係 $\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M_i}$ の導出木を書け．

練習問題 1.2 $\boldsymbol{M}$ を `fix f(x : nat) : nat := match x with O => O | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$\boldsymbol{M}\ \texttt{(S (S O))} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は `S (S (...O)...)` の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

練習問題 1.3 `Basics.v` に登場した `plus` 関数を `fix` を使った項 $\boldsymbol{M_{plus}}$ で表すと以下のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M_{plus}} \;=\; & \texttt{fix plus(m : nat) : nat := fun (n : nat) =>} \\ & \quad \texttt{match m with O => n | S m' => S (plus m' n) end}\end{aligned}$$

($\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O)`) `(S O)` が簡約されて `S (S O)` になる過程を，$\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O) (S O)` $\longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow$ `S (S O)` なる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙することで示せ．

練習問題 1.4 練習問題 1.3 の $\boldsymbol{M_{plus}}$ を使った項 $\boldsymbol{M_{plus}}$ `O` について無限簡約列 ($\boldsymbol{M_{plus}}$ `O` $\longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow \cdots$) があることを説明せよ．

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ の正規形を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ の導出木を書け．

練習問題 1.6 関係 `(fun x : nat => x) (S O)` $\longleftrightarrow$ `(fun x : nat => S O) O` の導出木を書け．

練習問題 1.7 練習問題 1.3 の $\boldsymbol{M_{plus}}$ について，$\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O) (S (S O))` $\longleftrightarrow$ $\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S (S O)) (S O)` が導出できることを説明せよ．(必ずしも導出木を全て書き下す必要はない．)

練習問題 1.8 項

`(fun c : nat -> bool -> nat => fun a : nat => (c a)) (fun b : nat => fun a : bool => b)`

の正規形を求めよ．

練習問題 1.9 以下の小問に答えよ．

1. 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ について，型付け関係 `plus : nat -> nat -> nat` $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

i. (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M_{i-1}}$ について，型付け関係 `plus : nat -> nat -> nat` $\vdash \boldsymbol{M_{i-1}} : \boldsymbol{T_{i-1}}$ が成立する $\boldsymbol{T_{i-1}}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.10 練習問題 1.5 の項 $\boldsymbol{N}$ の型付け関係の導出木を書け．

練習問題 1.11 合流性が成立するならば，項に対する正規形が高々ひとつであることを説明せよ．

練習問題 1.12 強正規化性と合流性が成立すると，$\boldsymbol{M} \longleftrightarrow \boldsymbol{N}$ を判定する問題が決定可能になるのはなぜか説明せよ．

2　単純型付ラムダ計算＋ペア

練習問題 2.1 `Lists.v` で定義した `fst` に相当する項 Fst を書き，

1. 簡約関係 $Fst\,$(0，S 0) $\longrightarrow^*$ 0 の導出木を書け．
2. 型付け関係 $\vdash Fst : \texttt{nat} * \texttt{nat} \texttt{->} \boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

練習問題 2.2 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{M}$ を見つけ，導出を書け．ただし，$\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{U}$ は型とする．

1. $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T}) \texttt{->} \boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{U}$
3. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$
4. $\vdash \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U}) \texttt{->} (\boldsymbol{S} \texttt{->} \boldsymbol{T} \texttt{->} \boldsymbol{U})$

3　多相ラムダ計算

$\boldsymbol{id}$ を項 `fun X : Type => fun x : X => x` とする．

練習問題 3.1

$$\boldsymbol{id}\ (\texttt{nat} \texttt{->} \texttt{nat})\ \texttt{S}\ (\boldsymbol{id}\ \texttt{nat}\ \texttt{0}) \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は S (S (...0)...) の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ．

練習問題 3.2 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash$ `fun X : Type => fun x : X => fun y : X => x` $: \boldsymbol{T}$
2. $\vdash \boldsymbol{id}\ (\forall \texttt{Y} : \texttt{Type}, \texttt{Y} \texttt{->} \texttt{Y})\ \boldsymbol{id} : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.3 項 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{S}$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \texttt{fun X : Type => fun x : X => x} \\
\boldsymbol{K} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y => x} \\
\boldsymbol{S} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun Z : Type =>} \\
&\qquad \texttt{fun x : X -> Y -> Z => fun y : X -> Y => fun z : X => x z (y z)}
\end{aligned}$$

このとき，以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T_1},\boldsymbol{T_2},\boldsymbol{T_3}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T_1}$

2. $\vdash \boldsymbol{K} : \boldsymbol{T_2}$

3. $\vdash \boldsymbol{S} : \boldsymbol{T_3}$

練習問題 3.4 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ および，$\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ を見つけ，導出を書け．ただし，練習問題 3.3 で求めた導出と重複する部分は省略して良い．

$\vdash$ `fun X : Type =>` $\boldsymbol{S}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2}\ \boldsymbol{T_1}\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2})\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_1}) : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.5 多相ラムダ計算を使うと，ペアを次のように定義することが出来る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{pair} \ &= \ \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y =>} \\ &\qquad \texttt{fun Z : Type => fun Z : X -> Y -> Z => z x y}\end{aligned}$$

また，このように定義したペアについての $\boldsymbol{fst}$ と $\boldsymbol{snd}$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{fst} \ &= \ \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : } \forall \texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>} \\ &\qquad \texttt{p X (fun x : X => fun y : Y => x)} \\ \boldsymbol{snd} \ &= \ \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : } \forall \texttt{Z : Type,(X -> Y -> Z) -> Z =>} \\ &\qquad \texttt{p Y (fun x : X => fun y : Y => y)}\end{aligned}$$

以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ を見つけ，導出を書け．

1. $\vdash \boldsymbol{pair} : \boldsymbol{S}$

2. $\vdash \boldsymbol{fst} : \boldsymbol{T}$

3. $\vdash \boldsymbol{snd} : \boldsymbol{U}$

練習問題 3.6 $\boldsymbol{pair}$, $\boldsymbol{fst}$, $\boldsymbol{snd}$ を練習問題 3.5 のように定義し，$\boldsymbol{p}$ を項 $\boldsymbol{pair}$ `nat bool O true` とする．このとき，

$$\boldsymbol{fst}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \ \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

となる $\boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{M_n}$ は正規形とする) を列挙せよ．また，

$$\boldsymbol{snd}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \ \longrightarrow \boldsymbol{N_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{N_m}$$

となる $\boldsymbol{N_i}$ (ただし $\boldsymbol{N_m}$ は正規形とする) を列挙せよ．

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．命題 $\neg\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P}$ `->` $\bot$ の略記である．

1. $\vdash \boldsymbol{p}$ `->` $\boldsymbol{q}$ `->` $\boldsymbol{p}$

2. $\vdash (\boldsymbol{p}$ `->` $\boldsymbol{q}$ `->` $\boldsymbol{r})$ `->` $(\boldsymbol{p}$ `->` $\boldsymbol{q})$ `->` $\boldsymbol{p}$ `->` $\boldsymbol{r}$

3. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$

4. $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\neg\boldsymbol{p}$

5. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{q}$ -> $\neg\boldsymbol{p})$

6. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$

7. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$ -> $\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$

8. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

9. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

10. $\vdash \neg\neg(\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$

11. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{p})$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{p}$

12. $\vdash (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$

13. $\vdash (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$

14. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$

15. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{p})$

16. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし `P`, `Q` は `nat -> Prop` 型の変数，`R` は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 (: T) は適宜省略する．

1. $\vdash$ (∀`x`,`P x`) -> (∃`y`,`P y`)

2. $\vdash$ (¬∃`x`,`P x`) -> ∀`y`,¬`P y`

3. $\vdash$ (∀`x`,¬`P x`) -> ¬∃`y`,`P y`

4. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` -> `Q x`)) -> ((∀`y`,`P y`) -> ∀`z`,`Q z`)

5. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` -> `Q x`)) -> ((∃`y`,`P y`) -> ∃`z`,`Q z`)

6. $\vdash$ (∀`x`,(`P x` ∧ `Q x`)) -> (∀`y`,`P y`) ∧ (∀`z`,`Q z`)

7. $\vdash$ (∀`x`,`P x` ∨ ¬`P x`) ∧ (¬¬∀`y`,`P y`) -> ∀`z`,`P z`

8. $\vdash$ (∃`x`,`P x` ∨ `Q x`) -> (∃`y`,`P y`) ∨ (∃`x`,`Q x`)

9. $\vdash$ (∀`x`,`P x` -> `R`) -> (∃`y`,`P y`) -> `R`

10. $\vdash$ ((∃`y`,`P y`) -> `R`) -> (∀`x`,`P x` -> `R`)

6　日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ．(ただし，命題や関数の意味は Coq での定義によるとする．)

1. $\forall$X : `Type`,$\forall$`x y` : `list X`,`length(x ++ y)` $=$ `length x + length y` を示せ.
2. `bool` 上の排他的論理和を計算する関数 `xorb` を定義し，$\forall$`b c` : `bool`,`xorb b c` $=$ `andb b c`-> `b = false` $\wedge$ `c = false` を示せ.
3. $\forall$`x y` : `nat`,`ev x` -> `ev y` -> `ev (x + y)` を `ev x` の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall$`x` : `nat`,$\forall$`y` : `nat`,$(\mathrm{x} = \mathrm{y} \vee \neg(\mathrm{x} = \mathrm{y}))$ を `x` についての帰納法を使って示せ.