(2015 年に書いたもの）

数学基礎論の関連した、おかしな数学の先生たち

江田 勝哉

脱背理法の本が出版されてしまった。今までにも、数学の先生の書いた、数理論理学、集合論関係の本でおかしなものはある。この内容よりも、ずっと凄まじいものもあるので、それらのおかしさを紹介しながら、数学基礎論 (数理論理学、集合論) の専門外の人が、誤解しやすいところを説明しようと思う。

1. 不完全性定理

おかしなものの横綱は、2011 年に出版の「ゲーデル、不完全性定理への道」北田均著である。北田均先生は東大の准教授であったが、英文で不完全性定理に関する見当違いの論文を自分が Editor である Journal に発表し、Zentralblatt Math. で Reviewer にこっぴどく叩かれたのだが、めげもせず反論したという強者 (つわもの) である。この本の内容は、その 2 つの論文よりも念がいってメチャクチャである。当然 Syntax と Semantics の区別ができていない。この区別は、通常の数学では、まず問題にならない、というより Syntax により、その対象が正確に表されていると思うことにより集中して考えられるのだから、むしろ区別しない。しかし、不完全性定理に関したところでは、この区別がなければすぐに矛盾が起き、なんでも証明できてしまう。内容については、北田均先生に書いたメイルがあるので、まずそれを引用する。本をお持ちの方でなくても、専門の方はどのようなところが変なのかは大体わかると思う。

> 北田均先生:
>
> はじめてメイルを差し上げます。私は早稲田大学の数学科に所属しており数学基礎論という題名の講義を担当しております。何人かの人から、お書きになった「ゲーデル不完全性発見への道」という本について聞きました。端的に申しますと、変なこと、明らかな間違いが書いてあるということなのです。一応読まさせていただきました。先生の場合、数学基礎論を専門とされていないようなので、哲学 (つまり数学としての証明のない世界) としてお書きになっていると私は思っています。しかし、先生は東大の数理科学研究科に所属されているので、読まれる方は数学の先生の書かれたものとして読むと思います。私に話をされた方も、そのような危惧を持たれたようです。私は年齢も重ねておりまして、数学基礎論関係

にたずさわる者として、やはり具合が悪いことをお伝えすべきであろうと思いこのメイルを出しました。

以下のことは、記述に関して数学としての証明があるかどうかを重要であるとする立場が前提ですから、ご自分の考え方として、お考えを適当に書いていられるとすれば、以下の指摘は筋違いです。つまり、数学の記述であることを前提として感じることを書きます。

初めの方でもすこし変に感じるところもあるのですが、もともと記述の難しいところではありますし、専門書でもおかしなこともあるので、いちいち指摘いたしません。とくに問題なのは、150 ページあたりからです。$A_{(n)}$ が現れます。この n は以下の展開から、numeral ではなく体系のなかの自由変数として表記されているというのが普通の解釈です。そして、ここに ω が入った $A_{(\omega)}$ が現れます。151 ページの脚注を読むと、recursive にコードされているようです。つまり、ここではコードされたものと、解釈されたものを同一視している観点が現れています。不完全性定理の周りでこのようなことをすれば当然矛盾します。しかし、そこは目をつぶって 152 ページに進みます。任意の順序数 α について $S^{(\alpha)}$ という体系がつくれるとあるのですが、そのためには $A_{(\delta)}$ が $\delta < \alpha$ について定義されている必要があります。これらは論理式で、順序数に関する帰納法で定義されるはずですが、recursive コードを使うからには、可算でなければなりません。153 ページにそれに対応することが書いてあるのですが、定義できていないものについて議論していることになり、変です。次の定理 11.5 の証明はとても変です。$A_{(\beta_0)}$ が定義できるとあるのですが、β_0 が可算でもそれが recursive な順序数でかつ、それまでの construction が recursive にコードされていないと定義のしようがないと思われますが定義できるように書いてあります。そのために第 9 章で、準備をされていると書いてあるのですが、とても準備となっているようには見えません。

154 ページの真ん中あたりの順序数に関する式が Feferman によるそうですが、Feferman がかわいそうです。Feferman の論文はこのページの脚注のものと思われますが、そこでは A_d が Kleene の O の元 d について定義されているので、順序数に対して直接定義されてはいません。Feferman の論文の初めのページは、素朴に考えたものを書いているので、順序数で直接定義しようとする

と極限数のところで、それまでのものの recursive コードを選ばなければならずうまく定義できないのです。ですから Feferman は素朴な考え方はうまくいかないということも書いています。さて 155 ページに進みますと、チャーチ-クリーネ順序数 ω_1 に対しても述語 $G^{(\omega_1)}, H^{(\omega_1)}$ が定義されてしまうのですが、それが数値的に表現可能であるといわれると、もうそれはあり得ない世界です。ω_1 は recursive でないので、もう何だかわからないのです。156 ページの真ん中にある「チャーチ-クリーネ順序数を持ち出さなくとも、、、、可算性を用いれば」という議論も、それまで、いくらでも矛盾がでる議論を積み重ねているので、何をかいわんや、という感じです。これらをまとめて、「メタのレベルで集合論が成り立つと仮定し、、、」というところは、今までさんざん形式 (syntacs) と内容 (semantics) の混同をされて、矛盾がでるところを通りぬけているので、集合論がどうのとかいうような問題とは思えません。157 ページの記述は、とても飛んでいて、間違いがあるという指摘の対象ではないので、感想は書きません。この後の章は、先生の見解の表明であるようですから、私はとても賛成できませんが、感想は書きません。私も Feferman の論文はよくわかっているとはいえません。しかし、先生の理解の仕方よりはかなりわかっているといってよいと思っています。

失礼ないい方をしていると思って書いています。ただ、遠慮したようないいかたでなく、感じたことを直接的にお伝えしました。はじめに書きましたが、数学の内容を書いているとすると、とても変だと思いますが、先生のものの考えかたを述べる用語として、使われているのだと思えば、まあそういうものかな、と思います。

江田勝哉

ここに書いているものは、この本の第 11 章で、「数学は矛盾している?」が章のタイトルだが、内容的には疑問符なしに矛盾が何度も証明されている、ご本人はお気づきでないのだが。ここで理解せず引用される Feferman の結果はなかなか面白いものであるが、あまり本には書いてないし、私にとっては前原先生と議論したかったことでもあるので丁寧に書いてみよう。ある無矛盾な公理化可能な体系、たとえば、PA から始めて、それに Consis(PA) を付け加える操作を考える。つまり、次は Consis(PA+Consis(PA)) を付け加える。不完全性定理からそれは真に強い公理系となる。これを繰り返していったら complete な公理系となるだろうといったことを前原先生が雑談中に話されたことを覚えている (生きていられる間にこのことについて Feferman の論文の

ことも含め前原先生とお話したいと思っているうち、前原先生は亡くなってしまった、22、3年前のことである)。このような素朴な考えかたがもとにある。しかし、これをそのまま実行しようとすると、1回目、2回目はよいのだが ω 回目はそれまでの無限和をとらなければならない。これは、n 回目を recursive にコードすれば定義できる。しかし、これを続けることを考えると段々あやしくなる。Feferman はまえがきで、この困難さにふれ、Turing が、そのまま素朴に実行しているわけではないことを述べている。それは順序数を recursive に記述する必要があるからだ。そのような記述がなければ公理系の Consistency を記述した論理式がその公理系から証明できていないとはいえない。北田均先生 (当然だが、前原先生という場合と違い尊称ではない) は集合論のなかで定義しているといわれているが一方で recursively enumerable になるともいわれている。しかし、無矛盾で recursively enumerable になるという条件を保っているようには見えない、Consis(T) が T では証明できないということがいえるというのは mod(北田) である。つまり、かなり早い時点で拡大が止まってしまう可能性もある。もうこの辺ですでにメチャクチャであるので、いかに北田均先生の本がメチャクチャかという話はまた後にすることにして、まともな話にもどる。

Turing は順序数に対して公理系を直接定義せず、順序数のコード全体である Kleene の O の要素 $d \in O$ に対して公理系を定義している。しかも Turing は complete theory を得るところまではいっていない。$\omega+1$ のところで Π_1-sentence に関してのみの completeness を証明している。Feferman も O を使うこの設定で、Turing の結果を推し進めている。Axiom が recursively enumerable に与えられていても、Consis というもの自体どう書くかという問題がある。Consis を繰り返すという方法であると、繰り返しのプロセス自体がコード化できるようになっていないため怪しいところが現れる。そこで、Feferman は Turing も考察した reflection principle (“A が T の定理ならば A”) を強い形にして、Consis の代わりに繰り返すことをしている。とくに、Turing の定義には明解でないところがあり、結局、定義をし直している。

ひとつの順序数に沢山のコードがあるが、コードが異なっても同じ公理系になるとか、同値の公理系になるとかいうことは始めから問題にしない (そこは Turing も同じである)。まず A_d を $d \in O$ についての和をとることにより complete な公理系が得られるのである。実際には、すべての O について足さなくても、d の表す順序数 $|d|$ が ω^{ω^ω} 未満のものの A_d の和で complete となることを証明している (Thm 5.13)。

つぎに、O のなかの branch で長さ $\omega^{\omega^\omega+1}$ 以下のものをひとつ選ぶことにより、Consis を素朴に繰り返すということに近い状態にちかい方法、つまり reflection principle を整列順序に繰り返すという方法で (後から branch を選ぶので超越的ではあるが) complete theory つまり true sentence 全体が得られることを証明している (Thm 5.15)。

さて、メチャクチャな話の続きである。上記の本の p.154 にある

$$\omega_1^{CK} < \omega^{\omega^{\omega^2}}$$

という不等式は、びっくりする（ご丁寧に「Feferman によれば」と書いてある）。左辺は recursive でない最小の順序数であり右辺は ε_0 より小さい順序数だからだ。もちろん普通の数学では大小関係が逆なのだが、記号の書き間違いではないのだ。それが北田均先生の脳内変換により可能となっている。$\sup_{d \in O} |d| = \omega_1^{CK}$ であるわけだが、上記の定理 5.15 に現れる順序数について

$$\omega^{\omega^{\omega}+1} < \omega^{\omega^{\omega^2}}$$

であり、$\bigcup_{d \in O} A_d$ が true sentence の全体であるという状況を表した不等式のようだ。繰り込み理論の計算の仕方よりすごい。ただ、$\omega^{\omega^{\omega^2}}$ という順序数は、Feferman の論文で見つけることはできなかった。とすると、上の計算はしたのだろうか、ω_1^{CK} より大きいところで。

2. 選択公理

次は大関の「写像 · 選択公理論」溝上武實著である。2006 年に出版されている。ここには、数理論理学と選択公理に関する典型的かつ決定的な無理解が見られる。とくにびっくりさせるのは、例えば、

> 「$a_n = n$ がすべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ について成立する数列 $(a_n \in \mathbb{N})$ の存在に選択公理が必要であること」

を書いてあることだ。$a_n = 1$ でも事情が同じこともふれてある。定義域が無限の写像の存在には、「常に」選択公理が必要であると書いてある。その理由は、定義域が無限であるとその中の要素を 1 つづつとりあげ、写像で写る先を指定する操作に選択公理が必要だということである。4.5 の「選択公理によせて」は圧巻であり、教育現場でこれらの写像と選択公理の関係にふれることは混乱をまねくので避けるべきであるが、教師がこの点を認識しておくことが重要であることが熱く語られる。選択公理による写像が神業であり、夜、机に一人向かうことにより、真の感動を伴い、自分の無力、有限性を克服し、森羅万象を支配する何か宇宙の絶対的存在者と同一した証になるのだ。西田幾多郎の絶対的自己矛盾撞着みたいな感じらしい。この章以後、濃度、順序数、連続関数と進むが、憑き物が落ちたように普通に進む。 確かにベルンシュタインの定理の証明に選択公理が必要であると言われれば、それはおかしいと思うわけだが、4.5 で毒気に当てられたあとであるせいかとくに感激しない。期待した読者は、何か肩すかしを食らった感じもあり、やはり横綱には見劣りする。

さて上記の写像について定義域が有限の場合、その存在のため選択公理は必要ないらしい。しかし、必要であるとか、不必要であるというのは、他の公理、論理体系などを設定しないと議論にならない、と

普通考えるところだが、この本では論理体系はもとより、他の公理は述べられていない。集合論の準備というところから始まるのだが、公理については何も述べられない。つまり、仏教の般若信教、キリスト教の使徒信経のようなものである。間違っているという指摘の対象にはならない。溝上先生の信条書である。ただ、この信条は上記のように、教師がこの点を認識しておかねばならないのだから、ああそうですか、なんて言う態度でいることは許されないのだ。

これらの感覚は、私が以前から何人かの数学者に尋ねられていることと共通しているので、それを説明しよう。実数の空でない部分集合の可算列が与えられているとする。この各々の集合から実数を一つづつとって実数の可算列をつくるのは一般には選択公理を必要とすることが知られている。一方、これが有理数の空でない部分集合の列の場合なら選択公理は必要としない。有理数は通常の大小関係の順序では整列されていないが、自然数の順序対を使った表現で、自然数の整列性を使って整列できるからだ。無限列でなくても、ある 1 つの空でない集合から 1 つの要素をとるのにも選択公理が必要なのではないか? という質問を受けたことが複数回ある。実は、選択公理の場合だって同じなのだが、数学では、要素をとってくるという操作は記述されない。要素があるということ、あるいは写像があるということが記述されるだけだ。つまり、論理に関する推論に帰着される。さて定義域が有限集合の場合の選択関数はどうかという問題は、定義域の濃度が 1 の場合は論理に帰着されるし、 2 の場合も論理に帰着されるという調子でやれば、有限集合の場合はよいように見える。しかし、ここには落とし穴がある。「有限」という概念がどこで扱われているかに注意する必要がある。「有限の場合、定義が書けてしまうから」という理由づけは、注意を要するのだ。これは間違いというわけでもない、「書く」という操作をどこで考えているかによるのだ。有限集合の場合、対象としている公理系のなかでの帰納法を使えば、正しいのだが、公理系、論理体系を眺めている立場での帰納法を使うと間違いである。普通の数学を考えている人が「書く」といえば公理や論理式を書くということであり、公理系のなかにコード化された意味での「書く」ということではないので、間違いである可能性が高い。この落とし穴に落ちないようにするには有限集合が定義域の場合、数学的帰納法で、定義域が n の場合を仮定して $n+1$ の場合を証明しておけば、 $n=0$ のときは自明なので、選択関数の存在が証明できる。落とし穴に落ちないようにとは書いたが、この数学的帰納法は公理系のなかでの帰納法という意味で解釈されるのが普通だからである。

3. 背理法

関脇は初めに書いた本で「数理論理の手法 - 証明の発見と背理法の除去」安部直人 · 中西泰雄共著で 2015 年出版である。実は、この本は

読んでいない。ただ2013年2月の東京理科大の数学入試問題で、「この問題の解答に背理法を用いてはならない」という但し書きのついた問題が出題されたとき、安部直人先生にホームページに書かれている脱背理法について、何をもって背理法といっているのか質問した。もちろん、これで話がつくはずもなく、また、丁度、ユタに3ヶ月いっているときであったので東京理科大のある先生と文科省にこの問題が不適切であることを知らせた。そのため、私との間のやりとりで私の著書に関してアマゾンに書いてあることが変であることも指摘した。そこで安部先生は当然、敢然と反論した、理解していないのだから仕方がないし、10年以上、脱背理法にしがみついているのだから、変を認めたら、死んでしまうかもしれない。そのようなわけで、ホームページの記述、アマゾンカスタマーレビューから変なことはよくわかっているので、本とは別に、この主張がいかに変かを書いてみる。横綱、大関に比べると、数学的な主張としてインパクトのある点がない。その点は三役に達していない、しかしこの教育効果という点では、横綱、大関は引退しているのに比べ、現役でありかつ、共著者は引退に程遠い事情から、三役入りした。

この2人(中西泰雄先生は安部先生直伝の脱背理法論者である)は古典論理の体系を想定し、背理法の除去を提唱している。ここで、背理法とは、否定の導入と狭義の背理法の両方を意味する。これが、形式論理の話ならば、たとえばHilbert 流ならば推論は Modus Penons と量化子にかんするものだけだから、始めからどちらの推論もない。また、NK なら否定の導入はあるが狭義の背理法は推論としてはない。つまり、これは形式論理に関する話ではない。

「背理法の仮定は結果的に正しくないので、証明中に正しくない主張が導かれます」という主張がある、これが変なのだ。A という仮定のもとに $\mathrm{B}_1, B_2, , \cdots$ と導かれる推論では、$A \to B_1, A \to B_2, \cdots$ が正しいという形で推論されているというのが論理的解釈である。もちろん、前提なしに正しい B_i も現れるわけだが。当然、背理法でもこのように考えるわけだが、安部先生は少なくとも背理法のときは仮定をとった命題を考え「暫定的に正しくない主張が導かれます」としている。これは変なのだが、何故、安部先生はこのように考え、もっともだと感じる人がいるのかを分析し、以下に安部先生が論理的に混乱している様子を説明する。実は、この混乱は他の数学の先生にもあることを発見したのだが、有名ではあるが、変であることに関して幕下力士なので取り上げない。

A を仮定するということは、A の成立している、つまり A が正しいモデルで考えるということであるが、A の成立するモデルがある場合、安部先生の頭は、そのモデルの中で働く。しかし、A の成立するモデルがない場合、安部先生の頭は混乱にはいり、頭が腐るという状態にはいる。頭が腐るというのは、本人がその被害にあったと書いてあるわけだが、どうも、その結果、現在も腐っているらしい。A が簡単な

場合で正しくなるモデルがあるかないかわかる場合しか想定していない。証明において、 A を仮定して矛盾が導かれれば、A が成立するモデルがない、つまり、A の否定が証明されたことになるわけで、あらかじめ正しくなるモデルがあるかないかわかるのなら、多くの証明はしなくてすむ。A の成立するモデルがあるかどうか、また $\neg A$ の成立するモデルがあるかどうかが判れば独立命題かどうかさえ判るのだ。安部先生が、天才でも矛盾というのはわからない、とか、頭が腐るというのは、矛盾している世界に入り込もうとしたとき起こる心の状態を表現していると思われる。矛盾が成り立っている世界はないので、ある命題が矛盾と分かれば推論は終わる。しかし、安部先生は、矛盾と「判った」後に、その世界で理解しようとしている。実は、これは証明をする、推論をするということが身についていない人のすることなのだ。矛盾というのは、推論の結果であり、あらかじめわかっているわけではないのだが、先に、それを想定し、その世界に入ろうとしているわけで、よく学生で結論を使って証明するものがいるが、その類である。学生の頭は腐らないが、安部先生は多少、考える能力があるので、腐るのかもしれない。

脱背理法の主張は不明確なものが多いのだが、最近、明確な部分を発見した。安部先生と中西先生はアマゾンカスタマーレビューに書いているらしいのだが、NK24 というのは中西先生らしい。というのはこの人は修士のころから、NK について書いている。背理法という本のレビューに次のことが書いてある。

> 背理法であるかどうかは、矛盾する仮定を置くかどうかで決まります。すなわち、仮定を満たす解釈（モデル、実例）が存在するかどうかという、意味論（構文論ではなく）で判断する必要があります。

これは特筆すべき考え方である。通常、背理法という言葉は、証明のなかのある推論の形式として使われるが、ここに、「構文論でなく」という断り書きつきで、意味論で判断すべきであると書いている。これは、証明というものが、内容と関係なく、推論の正しい適用による積み重ねになっているという構文的なものであるということと全く反対のことを主張している。もともと矛盾というものは、構文的なもので、モデルが存在しないというのは、結果的なことであるのだが、まるで逆さまである。この考えかたであれば、安部先生の記述もよく理解できる。というわけで、NK24 は中西先生である、状況証拠によるわけだが。Jimmy_N_A が安部先生であることは状況証拠というより、本人であると書いているのと同じであり、もし違っていても考えが同じである。「教育においては」という言葉でごまかしているが、結局、本人たちが証明というものの本質をとらえていないのである。

世の中に論理性のない人は多いので、この説になびく学生あるいはファンもいるようである。確かに、まともでつまらないのより、変な方が面白いということはある。

4. 結論 (間違っているということ)

これらの人の主張を理解しようとすると、「間違っているというのは、もっと合っていることをいうのだ」といいたくなる。まあ、大筋合っていれば、ここは違うだろうとか、それは筋が変だろうという議論はできる。しかし、ある程度以上間違っていると、もう、別世界、異次元に入っていて、鑑賞する対象であり、反論、議論の対象ではなくなる。その意味で、横綱、大関、関脇は三役の貫禄がある。