

「計算と論理」

Software Foundations

その6

五十嵐 淳

`cal19@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp`

`http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/`

京都大学

November 26, 2019

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

命題

Coq では、命題も (プログラムと同じく) 項の一種.
“Prop” 型を持つ.

```
Coq < Check (3=3).
```

```
3 = 3
```

```
  : Prop
```

```
Coq < Check (forall n m :nat, n + m = m + n).
```

```
forall n m : nat, n + m = m + n
```

```
  : Prop
```

```
Coq < Check (forall (n:nat) (b:bool), n = b).
```

```
Toplevel input, characters 36-37:
```

```
> Check (forall (n:nat) (b:bool), n = b).
```

```
>
```

```
Error:
```

```
In environment
```

```
n : nat
```

命題を定義する

```
Definition plus_fact : Prop := 2 + 2 = 4.
```

```
Theorem plus_fact_is_true : plus_fact.
```

```
Proof. reflexivity. Qed.
```

パラメータ化された命題

```
Coq < Definition is_three (n : nat) : Prop :=  
    n = 3.
```

```
is_three is defined
```

```
Coq < Check is_three.
```

```
is_three
```

```
  : nat -> Prop
```

```
Definition injective {A B} (f : A -> B) :=  
  forall x y : A, f x = f y -> x = y.
```

```
Lemma succ_inj : injective S.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m H. injection H as H1. apply H1.
```

```
Qed.
```

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「～でない」)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

連言 (conjunction)

$A \wedge B$ … 「 A かつ B 」

- $A \wedge B$ を証明するためには A と B をそれぞれ証明する
- split タクティックでゴールをふたつに分割

Example and_example : $3 + 4 = 7 \wedge 2 * 2 = 4$.

Proof.

split.

- ($* 3 + 4 = 7 *$) reflexivity.
- ($* 2 + 2 = 4 *$) reflexivity.

Qed.

連言の導入

```
Lemma and_intro : forall A B : Prop,  
  A -> B -> A /\ B.
```

Proof.

```
  intros A B HA HB. split.  
  - apply HA.  
  - apply HB.
```

Qed.

- 「任意の命題 A , B について」は(おそらく)初出
 - ▶ 意味は推測できますね？
- `split` と `apply and_intro` は同じ。

連言から何かいう

仮定にある $A \wedge B$ は destruct でふたつの仮定 A と B に分解できる.

```
Lemma and_example2 : forall n m: nat,  
  n = 0 /\ m = 0 -> n + m = 0.
```

Proof.

```
  intros n m H.
```

```
  destruct H as [Hn Hm].
```

```
  rewrite Hn. rewrite Hm.
```

```
  reflexivity.
```

Qed.

連言の除去

```
Lemma proj1 : forall P Q : Prop,  
  P /\ Q -> P.
```

Proof.

```
  intros P Q H.  destruct H as [HP HQ].  
  apply HP.  Qed.
```

```
Lemma proj2 : forall P Q : Prop,  
  P /\ Q -> Q.
```

Proof.

```
  intros P Q [HP HQ].  
  apply HQ.  Qed.
```

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「～でない」)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

選言 (disjunction)

$A \vee B$ … 「 A または B 」

「または」から何かを言うには `destruct` で場合分けをする:

```
Lemma or_example : forall n m: nat,  
  n = 0 \vee m = 0 -> n * m = 0.
```

Proof.

```
intros n m H. destruct H as [Hn | Hm].
```

```
- (* Here, n = 0 *)
```

```
  rewrite Hn. reflexivity.
```

```
- (* Here, m = 0 *)
```

```
  rewrite Hm. rewrite <- mult_n_0.
```

```
  reflexivity.
```

Qed.

選言の導入

タクテック left と right

Lemma or_intro :

forall A B : Prop, A -> A \/ B.

Proof.

intros A B HA. left. apply HA. Qed.

Lemma zero_or_succ :

forall n : nat, n = 0 \/ n = S (pred n).

Proof.

intros [|n].

- left. reflexivity.

- right. reflexivity.

Qed.

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「 \sim でない」)
 - ★ 不等号 (等しくない)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して \sim 」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

否定と矛盾

「 P ではない」($\neg P$, $\sim P$)の定義

```
Definition not (P:Prop) := P -> False.  
(* False: 「矛盾」「偽」を表す特殊な命題 *)  
(* 「P ではない」 = P を仮定すると矛盾する *)  
(* not : Prop -> Prop  
   命題を受け取って命題を返す関数! *)
```

```
Notation "~ x" := (not x) : type_scope.
```

爆発則

矛盾からは何でもいえる:

```
Theorem ex_falso_quodlibet : forall (P:Prop),  
  False -> P.
```

Proof.

```
  intros P contra.  
  destruct contra.  Qed.
```

- destruct は discriminate と同様な働き
 - ▶ discriminate は矛盾した等号に使う (教科書はちょっと間違ってる)

否定の証明 (1)

否定の証明は (False を導くことになるので) 少しコツが必要なことも.

```
Theorem not_False : ~ False.
```

```
Proof.
```

```
  unfold not. intros H. destruct H. Qed.
```

```
Theorem contradiction_implies_anything :
```

```
  forall P Q : Prop, (P /\ ~P) -> Q.
```

```
Proof.
```

```
  intros P Q [HP HNP].
```

```
  unfold not in HNP.
```

```
  apply HNP in HP. destruct HP. Qed.
```

否定の証明 (2)

```
Theorem double_neg : forall P : Prop,  
  P -> ~~P.
```

Proof.

```
  intros P H. unfold not.
```

```
  intros G. apply G. apply H. Qed.
```

不等号

$x \lt \! > y$ は $\neg(x = y)$ のこと:

```
Notation "x <> y" := (~ (x = y)) : type_scope.
```

```
Theorem zero_not_one : 0 <> 1.
```

```
(* expands to (0 = 1) -> False *)
```

```
Proof.
```

```
  intros contra. discriminate contra.
```

```
Qed.
```

Theorem `not_true_is_false` : forall b : bool,
b <> true -> b = false.

Proof.

```
intros [] H.
```

```
- (* b = true *)
```

```
  unfold not in H.
```

```
  apply ex_falso_quodlibet.
```

```
    (* or use tactic exfalso. *)
```

```
  apply H. reflexivity.
```

```
- (* b = false *)
```

```
  reflexivity.
```

Qed.

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「～でない」)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

真

- 真 (自明な命題) を表す命題: True
- 公理 I : True

```
Lemma True_is_true : True.  
Proof. apply I. Qed.
```

「使い道なさそうですが…」 → 教科書に「あとで使い道がでてきます」と書いてあるけど出てこない…

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「～でない」)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

(論理的) 同値

同値 (if and only if) は、両方向の含意の連言:

```
Definition iff (P Q : Prop) :=  
  (P -> Q) /\ (Q -> P).
```

```
Notation "P <-> Q" := (iff P Q)  
  (at level 95, no associativity) : type_scope.
```

同値性に関する性質

対称性

```
Theorem iff_sym : forall P Q : Prop,  
  (P <-> Q) -> (Q <-> P).
```

Proof.

```
  intros P Q [HPQ HQP].  
  split.  
  - (* -> *) apply HQP.  
  - (* <- *) apply HPQ.   Qed.
```

Qed.

命題同士の「等しさ」としての iff

いくつかのタクティック (reflexivity, rewrite) では
iff を = と同じように扱うことができる
要おまじない (ライブラリのロード):

```
Require Import Coq.Setoids.Setoid.
```

```
Lemma mult_0 : forall n m,  
  n * m = 0 <-> n = 0 \\/ m = 0.  
Lemma or_assoc : forall P Q R : Prop,  
  P \\/ (Q \\/ R) <-> (P \\/ Q) \\/ R.  
  
Lemma mult_0_3 : forall n m p,  
  n * m * p = 0 <-> n = 0 \\/ m = 0 \\/ p = 0.  
Proof.  
  intros n m p.  
  rewrite mult_0. rewrite mult_0.  
  rewrite or_assoc.  
  reflexivity.  
Qed.
```

apply で \leftrightarrow 命題を使うと、「ならば」の方向をいい感じに選んでくれる.

```
Lemma apply_iff_example :
```

```
  forall n m : nat, n * m = 0 -> n = 0  m = 0.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m H. apply mult_0. apply H.
```

```
Qed.
```

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
 - ▶ 連言 (「かつ」)
 - ▶ 選言 (「または」)
 - ▶ 偽・矛盾と否定 (「～でない」)
 - ▶ 真
 - ▶ 論理的同値 (if and only if)
 - ▶ 特称量化 (「ある x が存在して～」)
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

特称量化

$\exists x : X.P \dots$ 「型 X の要素 x が存在して P 」

Lemma four_is_even:

exists n : nat, 4 = n + n.

Proof.

exists 2. reflexivity.

Qed.

- 「存在の証拠」 (witness) を指定する exists
- 引き続き, その証拠が性質 P を満たすことを証明する

特称量化から何かいう

文脈に特称量化 $\exists x.P$ がある時は `destruct` を使う

- (正体はわからない)「存在の証拠」 x と
- それが性質 P を満たす, という仮定が得られる

```
Theorem exists_example_2 : forall n,  
  (exists m, n = 4 + m) ->  
  (exists o, n = 2 + o).
```

Proof.

```
intros n H.
```

```
destruct H as [m Hm].
```

(* witness に `intro` パターンで名前をつける *)

```
exists (2 + m). apply Hm. Qed.
```

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

命題を返す再帰的関数

「 x はリスト l の要素である」ことを表す再帰的命題

```
Fixpoint In {A : Type}
  (x : A) (l : list A) : Prop :=
  match l with
  | [] => False
  | x' :: l' => x' = x \/ In x l'
  end.
```

- x は第一要素と等しい, または,
- x は第二要素と等しい, または...

Example In_example_1 : In 4 [1; 2; 3; 4; 5].

Proof.

simpl. right. right. right. left.

reflexivity.

Qed.

```
Example In_example_2 : forall n,  
  In n [2; 4] -> exists n', n = 2 * n'.
```

Proof.

```
simpl.
```

```
intros n H. destruct H as [H1 | [H2 | []]].
```

```
- exists 1. rewrite <- H1. reflexivity.
```

```
- exists 2. rewrite <- H2. reflexivity.
```

Qed.

- ネストした intro パターン

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論

証明も第一級データ

Check コマンドの挙動

```
Coq < Check 1.
```

```
1
```

```
    : nat
```

```
Coq < Check plus_comm.
```

```
plus_comm
```

```
    : forall n m : nat, n + m = m + n
```

- なぜ同じコマンド？
- 定理の文面があたかも何かの型であるかのよう？
- 実は…
 - ▶ plus_comm は「証明オブジェクト」というデータ (の名前)
 - ▶ 証明オブジェクトの型は命題

型 = 命題!?

型はデータの使い方を規定する

- $\text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}$
 - ▶ ふたつの nat を引数として与えると, nat が得られる
- $\forall X : \text{Type}, X \rightarrow X$
 - ▶ 型 T を引数として与えると, $T \rightarrow T$ 型の関数が得られる

命題をムリヤリ型っぽく読む

- $n = m \rightarrow n + n = m + m$
 - ▶ $n = m$ の証明を与えると, $n + n = m + m$ の証明が得られる!?
- $\forall n : nat, 2 * n = n + n$
 - ▶ 自然数 a を与えると $2 * a = a + a$ の証明が得られる!?

```
Coq < Check (plus_comm 3).  
plus_comm 3  
  : forall m : nat, 3 + m = m + 3
```

足し算の交換則を使った証明ふたたび

```
Lemma plus_comm3_take3 :
```

```
  forall n m p, n + (m + p) = (p + m) + n.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m p.
```

```
  rewrite plus_comm.
```

```
  rewrite (plus_comm m p).
```

```
  reflexivity.
```

```
Qed.
```

assert を使うよりエレガントでしょ？

(assert を使った証明)

```
Lemma plus_comm3_take2 :
```

```
  forall n m p, n + (m + p) = (p + m) + n.
```

```
Proof.
```

```
  intros n m p.
```

```
  rewrite plus_comm.
```

```
  assert (H : m + p = p + m).
```

```
  { rewrite plus_comm. reflexivity. }
```

```
  rewrite H.
```

```
  reflexivity.
```

```
Qed.
```

別の(人工的な)例

```
Theorem in_not_nil :  
  forall A (x : A) (l : list A),  
    In x l -> l <> [].
```

(* x = 42 に特化した文言 *)

```
Lemma in_not_nil_42 :  
  forall l : list nat, In 42 l -> l <> [].
```

Proof.

```
  intros l H.  
  apply in_not_nil.  (* doesn't work! *)
```

解決法 1~4(どれでも好きなものを使ってください.)

```
apply in_not_nil with (x := 42).  apply H.  
apply in_not_nil in H.  apply H.  
apply (in_not_nil nat 42).  apply H.  
apply (in_not_nil _ _ _ H).
```

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
 - ▶ 関数の外延性
 - ▶ 命題と真偽値
 - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

集合 \doteq 述語？

- x が集合 X の要素である
 - ▶ 2 は偶数の集合の要素である
- x は性質 X を満たす (命題 $X(x)$ が成立する)

```
Definition ev (n:nat) : Prop :=
```

```
  evenb n = true.
```

```
Check (ev 2).
```

```
ev 2 : Prop (* 2 は偶数である *)
```

Coq の論理と集合論は似ているが重要な違いもある

関数の等しさ

Coqでの関数の等しさの定義

$f, g : X \rightarrow Y$ が等しい $\stackrel{def}{\iff} f \leftrightarrow g$

- \leftrightarrow は簡約による等しさ

Example function_equality_ex1 :

```
(fun x => 3 + x) = (fun x => (pred 4) + x).
```

Proof. reflexivity. Qed.

集合論での関数の等しさの定義

$f, g : X \rightarrow Y$ が等しい $\stackrel{def}{\iff} \forall x \in X, f(x) = g(x)$

- 入出力の関係だけみる
- 関数の外延性 (extensionality) 原理ともいう。

Example `function_equality_ex2` :

```
(fun x => x + 1) = (fun x => 1 + x).
```

Proof.

```
(* Stuck *)
```

Abort.

外延性の公理の追加

Axiom コマンド (証明なしで使える命題の追加)

```
Axiom functional_extensionality :  
  forall {X Y: Type} {f g : X -> Y},  
    (forall (x:X), f x = g x) -> f = g.
```

```
Example function_equality_ex2 :  
  (fun x => x + 1) = (fun x => 1 + x).
```

Proof.

```
  apply functional_extensionality. intros x.  
  apply plus_comm.
```

Qed.

補足

Q rewrite plus_comm で解決できなかったの？

A fun x の外側から見ると、 $x + 1$ は (型がついた) 式ではないのでダメなのです (x が文脈にないので).

公理の追加について

- 何でもかんでも追加してよいわけではない
- 体系が矛盾する (何でも証明できる) 危険性
- 矛盾しないことを示すのは大変
- 関数の外延性公理は追加しても矛盾しないことが知られている
- Print Assumptions 定理名. で, 定理の証明に使った公理がわかる

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
 - ▶ 関数の外延性
 - ▶ 命題と真偽値
 - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

命題と真偽値

性質を記述するふたつの方法: 真偽値 (bool) と命題 (Prop)

例 1: n は偶数である

- $evenb\ n$ が $true$ を返す
- ある k が存在して, $double\ k = n$

この場合, ふたつの言い方は等価

```
Definition even x := exists k : nat, x = double k
Theorem even_bool_prop : forall n,
  evenb n = true <-> even n.
```

真偽値 $evenb\ n$ は命題 $even\ n$ を 反映 (reflect) している, という

例2: 自然数 n と m は等しい

- $n =? m$ が *true* を返す
- $n = m$

Theorem `beq_nat_true_iff` : forall n m : nat,
(n =? m) = true <-> n = m.

命題 vs 真偽値

- 「`beq_nat n m = true` を返す」ことがわかっただけでは、証明の役にあまりたたない
- 一方、「`n = m`」であることがわかると `rewrite` で使うことができる
- 逆に命題 (例えば `n = m`) はプログラム中 (例えば `if` の条件部など) で使えない

(* これはダメ! *)

```
Definition is_even_prime n :=  
  if n = 2 then true  
  else false.
```

- ▶ 与えられた命題の真偽を判定する一般的な方法 (アルゴリズム) がないことも関係

- 計算で判定できる性質でも *Prop* で記述した方が簡単に定義できる場合も多い
 - ▶ 例: 文字列 s が正則表現 R にマッチする (かどうか)

Proof by reflection

命題を，それを反映する真偽値式に置き換えて，計算によって証明する。

ふつうの(?)証明

```
Example even_1000 : even 1000.
```

```
Proof. unfold even. exists 500. (* まず k を  
見つける *)
```

```
  reflexivity. Qed.
```

reflection による証明

```
Example even_1000 : even 1000.
```

```
Proof. apply even_bool_prop. reflexivity. Qed.
```

一般に reflection による証明の方が，かなり単純になる。

```
Example not_even_1001 : evenb 1001 = false.  
Proof. reflexivity. Qed.
```

```
Example not_even_1001' : ~(even 1001).  
Proof. unfold even.  
      rewrite <- even_bool_prop.  
      unfold not.  
      simpl.  
      intro H.  
      discriminate H.  
Qed.
```

even_bool_prop を使わない証明は難しそう…

逆に命題の “=” が嬉しい例

```
Lemma plus_eqb_example : forall n m p : nat,  
  n =? m = true -> n + p =? m + p = true.
```

Proof.

```
  intros n m p H.  
  rewrite eqb_eq in H.  
  rewrite H.  
  rewrite eqb_eq.  
  reflexivity.
```

Qed.

状況によって命題の “=” と真偽値を行ったり来たりするのがミソ

Logic.v

- 命題
- 論理結合子
- 命題を使ったプログラム
- 定理の引数への適用
- Coq vs. 集合論
 - ▶ 関数の外延性
 - ▶ 命題と真偽値
 - ▶ 古典論理 vs. 構成的論理

排中律

「どんな命題でもその肯定か否定のどちらかは成立する」

```
Definition excluded_middle :=  
  forall P : Prop, P \/ ~ P.
```

は Coq では証明できない!

- 証明する立場に立つと、肯定・否定どちらを証明するか left, right で選ばなければいけない
- …がどちらを使えばよいかは P に依存するので一般にはわからない
 - ▶ これも、与えられた命題の真偽を判定する一般的な方法(アルゴリズム)がないことと関係

限定された排中律 (1)

真偽値で reflect できる場合:

```
Theorem restricted_excluded_middle :  
  forall P b,  
    (P <-> b = true) -> P \/ ~ P.
```

Proof.

```
intros P b H. destruct b.  
- left. rewrite H. reflexivity.  
- right. rewrite H.  
  intros contra. destruct contra.
```

Qed.

限定された排中律 (2)

等号についての排中律:

```
Theorem restricted_excluded_middle_eq :  
  forall (n m : nat), n = m \/ n <> m.
```

Proof.

```
  intros n m.
```

```
  apply
```

```
    (restricted_excluded_middle (n = m)  
      (n =? m)).
```

```
  symmetry.
```

```
  apply eqb_eq.
```

Qed.

構成的論理 (constructive logic)

排中律がないおかげ・せいで,

- 存在 ($\exists x, P x$) の証明ができたなら、「何が P を満たすのか」を証明中に見つけ出すことができる.
 - ▶ 存在証明は「 P を満たす何か」を作る (構成する) 必要がある
 - 逆に, いくつかの証明が困難 (場合によっては不可能) になる
- 排中律を認めない論理: 構成的論理
 - 排中律を (任意の命題に) 認める論理: 古典論理 (classical logic)

構成的でない存在証明の例

a^b が有理数であるような無理数の組 a, b が存在する

(証明) $\sqrt{2}$ は無理数である。もし、 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数ならば、 $a = b = \sqrt{2}$ とすればよい。そうでなければ、 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすると、 $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ と、有理数になる。

(どこで排中律を使ったかわかりますか?)

構成的論理では認めない他の原理

2重否定の除去 (狭義の背理法)

任意の命題 P について, P の否定を仮定して矛盾が導けたら P である, といってよい

```
Theorem classic_double_neg : forall P : Prop,  
  ~~P -> P.
```

Proof.

```
  intros P H. unfold not in H.
```

```
  (* But now what? There is no way to  
    "invent" evidence for [P]. *)
```

```
  Abort.
```

構成的論理では成立しない古典論理公理

- パース則 (Peirce's law): $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
- 排中律: $P \vee \neg P$
 - ▶ ただし, $\neg\neg(P \vee \neg P)$ は成立
- ド・モルガン則 (の一部):
 - ▶ $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow P \vee Q$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

宿題： / 午前10:30 締切

- Exercise: `and_assoc` (2), `contrapositive` (2), `not_both_true_and_false` (1), `or_distributes_over_and` (3), `dist_exists_or` (2), `In_app_iff` (2), `eqb_neq` (1)
- 解答が記入された `Logic.v` を `origin/master` に push
- レポジトリに「課題6」という名前の新規 issue を作成し以下を明記:
 - ▶ 講義・演習に関する質問，わかりにくいと感じたこと，その他気になること。（「特になし」はダメです。）
 - ▶ 友達に教えてもらったら、その人の名前，他の資料（web など）を参考にした場合，その情報源（URL など）。