並列分散システム論配布資料 (4)
Milner [1]: 第5〜6章

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻

五十嵐 淳

e-mail: igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp

平成25年10月27日

5 Transitions and Strong Equivalence(遷移と強い等価性)

この章の概要は以下の通りである.

- 並行プロセスをLTSとして捉える
- 強双模倣を適用することで並行プロセスの「等しさ」の基準を与える
- 強双模倣性は，プロセス上の合同関係であることを示す．すなわち，与えられたプロセス式の部分をそれと強双模倣なプロセスで置き換えても強双模するプロセスが得られる．
- また，並行プロセスに対し強双模倣な逐次プロセスが存在することを示す．つまり並行プロセスの挙動は逐次プロセスでも記述できることがわかる．

アクションの定義の拡張:
 アクションの集合 $\alpha, \beta, \ldots \in Act = \mathcal{L} \cup \{\tau\}$
以下で定義する遷移関係 $P \xrightarrow{\alpha} P'$ では,

- $\alpha = \tau$ はリアクションを表現
- $\alpha = a, \bar{a}$ は外界(もしくは他の並行プロセス)とのやりとり

を示す.

5.1 定義 [並行プロセス式から生成されるLTS]: 並行プロセス式とプロセス定義(の集合)から生成される($Act = \mathcal{L} \cup \{\tau\}$ 上の)LTSとは,

- $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$
- $\mathcal{T}$ は以下の規則 (遷移規則と呼ぶ) で与えられる

ような LTS のことである．

$$\frac{}{\sum_{i\in I} \alpha_i.P_i \xrightarrow{\alpha_i} P_i} \quad (\textsc{sum}_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\lambda} P' \qquad Q \xrightarrow{\bar{\lambda}} Q'}{P \parallel Q \xrightarrow{\tau} P' \parallel Q'} \quad (\textsc{react}_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P \parallel Q \xrightarrow{\alpha} P' \parallel Q} \quad (\textsc{l-par}_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P \parallel Q \xrightarrow{\alpha} P \parallel Q'} \quad (\textsc{r-par}_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad (\text{if } \alpha \notin \{a, \bar{a}\})}{\mathsf{new}\, a\, P \xrightarrow{\alpha} \mathsf{new}\, a\, P'} \quad (\textsc{res}_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A \xrightarrow{\alpha} P' \qquad (\text{if } A(\vec{a}) \stackrel{def}{=} P_A)}{A\langle\vec{b}\rangle \xrightarrow{\alpha} P'} \quad (\textsc{ident}_{\mathbf{t}})$$

規則 $\textsc{react}_{\mathbf{t}}$ において，λ が co-name である場合もあることに注意．この場合，$\bar{\lambda}$ が対応する name となる．

5.2 Proposition [構造的合同性は遷移により保存される]: $P \xrightarrow{\alpha} P'$ かつ $P \equiv Q$ ならばあるプロセス Q' が存在して，$Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ かつ $P' \equiv Q'$

5.3 補題: $P \longrightarrow P'$ ならば $P \xrightarrow{\tau}\equiv P'$

5.4 補題: $P \xrightarrow{\lambda} P'$ とする．この時，P, P' は構造的合同を通じて以下のような形をしている:

$$\begin{aligned} P &\equiv \mathsf{new}\, \vec{z}((\lambda.Q + M) \parallel R) \\ P' &\equiv \mathsf{new}\, \vec{z}(Q \parallel R) \end{aligned}$$

ただし $\lambda, \bar{\lambda} \notin \vec{z}$

5.5 定理 [τ 遷移とリアクションの同値性]: $P \longrightarrow P'$ ならば，その時に限り $P \xrightarrow{\tau}\equiv P'$

5.6 定理:

1. 構造的合同性は並行プロセス上の強双模倣である
2. $P \equiv Q$ ならば $P \sim Q$

5.7 例 [Semaphore]:

5.8 定義 [強 (双) 模倣 up to $\equiv$]: $\mathcal{P}$ 上の二項関係 $\mathcal{S}$ が以下の条件をみたす時，$\mathcal{S}$ は**強模倣** *up to* $\equiv$[1] であるという:

[1] "up to X" は「厳密には等しくないが X という基準で等しいくらいの差異は無視して/大目にみて」のような気持ちが込められているが，日本語にどう訳すのが適当だろうか…

もし $P \mathcal{S} Q$ かつ $P \xrightarrow{\alpha} P'$ ならば，Q' が存在して $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ かつ $P' \equiv\mathcal{S}\equiv Q'$ である

また $\mathcal{S}, \mathcal{S}^{-1}$ が強模倣 up to $\equiv$ である時，$\mathcal{S}$ は強双模倣 up to $\equiv$ である，という．

5.9 Proposition: $\mathcal{S}$ が強双模倣 up to $\equiv$ であり，$P \mathcal{S} Q$ ならば $P \sim Q$.

強双模倣をプロセスの等しさの基準とすると，どんなプロセスも $\sum$ プロセスと等しく—例えば $a \parallel b \sim a.b + b.a$ である—，プロセスをブラックボックスとして考えると，それが並行的に実装されているか逐次的に実装されているかの内部構造については伺い知れないことを示している．

5.10 Proposition: 任意のプロセス $P \in \mathcal{P}$ に対し，$P \sim \sum\{\beta.Q \mid P \xrightarrow{\beta} Q\}$ である．

以下の結果は標準形プロセスがどんな遷移を行いうるかを示したものである．これを繰り返し適用すると，どんなプロセスについても，それと等しい $\parallel$ のないプロセスが存在することがわかる．

5.11 Proposition [The Expansion Law]: 任意の名前の列 $a_1, \ldots, a_n$ とプロセス $P_1, \ldots, P_m$ に対し，

$$\mathsf{new}\,\vec{a}\,(P_1 \parallel \cdots \parallel P_m) \sim$$
$$\begin{cases} \sum\{\alpha.\mathsf{new}\,\vec{a}\,(P_1 \parallel \cdots \parallel P_i' \parallel \cdots \parallel P_m) \mid 1 \leq i \leq m \text{ and } P_i \xrightarrow{\alpha} P_i' \text{ and } \alpha, \bar{\alpha} \notin \vec{a}\} \\ + \sum\{\tau.\mathsf{new}\,\vec{a}\,(P_1 \parallel \cdots \parallel P_i' \parallel \cdots \parallel P_j' \parallel \cdots \parallel P_m) \mid 1 \leq i \leq j \leq m \text{ and } P_i \xrightarrow{\lambda} P_i' \text{ and } P_j \xrightarrow{\bar{\lambda}} P_j'\} \end{cases}$$

また，$\sim$ は合同関係である．すなわち，与えられたプロセス式の部分をそれと強双模倣なプロセスで置き換えても強双模するプロセスが得られる．

5.12 Proposition [Strong process congruence]: $\sim$ は合同関係である．すなわち，もし $P \sim Q$ ならば

1. $\alpha.P + M \sim \alpha.Q + M$
2. $\mathsf{new}\,a\,P \sim \mathsf{new}\,a\,Q$
3. $P \parallel R \sim Q \parallel R$
4. $R \parallel P \sim R \parallel Q$

である．

6 観測等価性

強双模倣性は，構造合同性よりも粗い (つまりより多くのプロセスを「等しい」と関係づける) 合同関係である．しかし，プロセスをブラックボックスとして捉える立場からすると，まだ細かすぎる (等しいと考えてもよさそうなプロセスを区別する)．例えば P と $\tau.P$ というプロセスは外部から挙動を観測する立場からは区別できない (内部遷移が発生したかは観測できないので) と考えられるが，強双模倣を基準とすると，このふたつのプロセスは (一般には) 等しくない．

(並行プロセスの理論に限らず) 一般に，与えられたシステムに対し，純粋にシステム外部から観測できる挙動に基づく等しさを**観測等価性** (*observational equivalence*) と呼ぶ．例えば，(並行プロセスとは特に関係がないが) ソーティングを行うシステムを考えると，例え違うアルゴリズムを用いていても，同じ入力を与えれば同じ出力になる，という意味で，観測等価だと考えられる．

ここでは，並行プロセスにおける観測等価性のひとつの定義である弱双模倣性を与える．

まず，関係 $P \stackrel{\alpha}{\Longrightarrow} Q$ を $P \longrightarrow \cdots \longrightarrow \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} Q$，関係 $P \stackrel{\vec{\alpha}}{\Longrightarrow} Q$ を $P \stackrel{\alpha_1}{\Longrightarrow} \cdots \stackrel{\alpha_n}{\Longrightarrow} Q$ と定義する．

6.1 定義 [**弱模倣性，弱双模倣性**]**:** 並行プロセス上の二項関係 $\mathcal{S}$ が**弱模倣 (関係)**(*weak simulation*) である，とは，

> もし $p\ \mathcal{S}\ q$ かつ $p \stackrel{\vec{\alpha}}{\Longrightarrow} p'$ ならば，$q' \in \mathcal{P}$ が存在して $q \stackrel{\vec{\alpha}}{\Longrightarrow} q'$ かつ $p'\ \mathcal{S}\ q'$ である

ことをいう．そして，並行プロセス上の二項関係 $\mathcal{S}$ について，$\mathcal{S}, \mathcal{S}^{-1}$ が弱模倣関係である時 $\mathcal{S}$ を**弱双模倣関係** (*weak bisimulation*) であるという．P, Q に対し，$P\ \mathcal{S}\ Q$ なる弱双模倣関係 $\mathcal{S}$ が存在する時，$P \approx Q$ と書く．

$\approx$ は $\sim$ と同様，合同関係である．また，強双模倣関係は弱模倣関係であり，$\sim \subseteq \approx$ であるが，逆は必ずしも成立しない．$\approx$ の特徴を述べておく．

1. $P \approx \tau.P$
2. $M + N + \tau.N \approx M + \tau.N$
3. $M + \alpha.P + \alpha.(\tau.P + N) \approx M + \alpha.(\tau.P + N)$
4. $a + b \not\approx a + \tau.b \not\approx \tau.a + \tau.b \not\approx a + b$

参考文献

[1] Robin Milner. Communicating and Mobile Systems: The π-Calculus. Cambridge University Press. 1999.