知能情報学専攻講義 ソフトウェア基礎論 (担当: 五十嵐 淳) 平成 14 年度試験 (1/28 実施)

設問 1 IMP 言語における算術式 a の深さと大きさを求める関数 $depth(a)$ と $size(a)$ を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&depth(n) = depth(X) = 1\\
&depth(a_0 + a_1) = depth(a_0 - a_1) = depth(a_0 \times a_1) = \max(depth(a_0), depth(a_1))\\
&size(n) = size(X) = 1\\
&size(a_0 + a_1) = size(a_0 - a_1) = size(a_0 \times a_1) = size(a_0) + size(a_1) + 1
\end{aligned}
$$

(1) $depth(X + (3 - 4))$ と $size(X + (3 - 4))$ を求めよ。

(2) 任意の算術式 a に対して、$size(a) \leq 2^{depth(a)} - 1$ が成立することを証明せよ。

設問 2 関数 $F \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ を次のように定義する ($\mathbf{N}$ は整数の集合である)。

$$F(X) = \{x \mid y \in X \;\&\; x = y^2 \bmod 9\} \cup \{5\}$$

($x \bmod y$ は x を y で割った余りである。)

(1) $F(\{1, 4\})$ を求めよ。

(2) この関数に最小不動点は存在するか。存在する場合にはそれを示せ。存在しない場合にはその理由を述べよ。

設問 3 IMP 言語のコマンドの文法を変更し、

$$c ::= \mathbf{skip} \mid X := a \mid c_0; c_1 \mid \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1 \mid \mathbf{repeat}\ c\ \mathbf{until}\ b$$

とする。ただし、a, b はそれぞれ、算術式と真偽値式を表すメタ変数である。$\mathbf{repeat}\ c\ \mathbf{until}\ b$ は、「b が成立するまで c を実行し続ける」という意味で、例えば $\sigma(X) = 0$, $\sigma(Y) = 4$ の時、

$$
\begin{gathered}
\langle \mathbf{repeat}\ X := X + Y; Y := Y - 1\ \mathbf{until}\ Y = 0, \sigma\rangle \to \sigma[10/X][0/Y]\\
\langle \mathbf{repeat}\ X := X + Y; Y := Y - 1\ \mathbf{until}\ \mathbf{true}, \sigma\rangle \to \sigma[4/X][3/Y]
\end{gathered}
$$

という実行関係が成立するものである。以上を踏まえ、$\mathbf{repeat}\ c\ \mathbf{until}\ b$ に対する実行関係の導出規則を書き下し、

$$\langle \mathbf{repeat}\ X := X + Y; Y := Y - 1\ \mathbf{until}\ Y = 3, \sigma\rangle \to \sigma[4/X][3/Y]$$

という実行関係を導出せよ。

設問 4 公理的意味論の (表示的意味論に対する) 相対的完全性とはどのような性質か説明せよ。

設問 5 次の c_0, c_1 は「α か β のどちらかから非決定的に値を受信して、それぞれ c_0' か c_1' を実行する」という意味の communicating process 言語で書かれたコマンドである。

$$
\begin{aligned}
c_0 &\equiv \mathbf{if}\ (\mathbf{true} \land \alpha?X \to c_0') \parallel (\mathbf{true} \land \beta?X \to c_1')\ \mathbf{fi}\\
c_1 &\equiv \mathbf{if}\ (\mathbf{true} \to \alpha?X; c_0') \parallel (\mathbf{true} \to \beta?X; c_1')\ \mathbf{fi}
\end{aligned}
$$

この二つのコマンドの挙動の違いを説明せよ。(ヒント: $i = 0, 1$ について、$(c_i \parallel \alpha!n)\backslash\beta\backslash\alpha$ に関する実行関係を考えよ。)

A　IMP の実行関係導出規則 (抜粋)

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma}$$

$$\frac{\langle a, \sigma\rangle \to n}{\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma[n/X]}$$

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'' \qquad \langle c_1, \sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true} \qquad \langle c_0, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false} \qquad \langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

B　communicating process 言語の実行関係導出規則 (抜粋)

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma\rangle \to \sigma}$$

$$\frac{\langle a, \sigma\rangle \to n}{\langle X := a, \sigma\rangle \to \sigma[n/X]}$$

$$\frac{}{\langle \alpha?X, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha?n} \sigma[n/X]}$$

$$\frac{\langle a, \sigma\rangle \to n}{\langle \alpha!a, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha!n} \sigma}$$

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c_0', \sigma'\rangle}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c_0'; c_1, \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle gc, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c, \sigma'\rangle}{\langle \mathbf{if}\ gc\ \mathbf{fi}, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c, \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle gc, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}{\langle \mathbf{do}\ gc\ \mathbf{od}, \sigma\rangle \to \sigma}$$

$$\frac{\langle gc, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c, \sigma'\rangle}{\langle \mathbf{do}\ gc\ \mathbf{od}, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c; \mathbf{do}\ gc\ \mathbf{od}, \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c_0', \sigma'\rangle}{\langle c_0 \parallel c_1, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c_0' \parallel c_1, \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha?n} \langle c_0', \sigma'\rangle \qquad \langle c_1, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha!n} \langle c_1', \sigma\rangle}{\langle c_0 \parallel c_1, \sigma\rangle \to \langle c_0' \parallel c_1', \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle c, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c', \sigma'\rangle \qquad (\lambda \not\equiv \alpha?n\ \text{かつ}\ \lambda \not\equiv \alpha!n)}{\langle c\backslash\alpha, \sigma\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle c'\backslash\alpha, \sigma'\rangle}$$

guarded command に関する規則

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}}{\langle b \to c, \sigma\rangle \to \langle c, \sigma\rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}}{\langle b \to c, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true}}{\langle b \wedge \alpha?X \to c, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha?n} \langle c, \sigma[n/X]\rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}}{\langle b \wedge \alpha?X \to c, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{true} \qquad \langle a, \sigma\rangle \to n}{\langle b \wedge \alpha!a \to c, \sigma\rangle \xrightarrow{\alpha!n} \langle c, \sigma\rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}}{\langle b \wedge \alpha!a \to c, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}$$

$$\frac{\langle gc_0, \sigma\rangle \to \langle c, \sigma'\rangle}{\langle gc_0 \mathbin{[\!]} gc_1, \sigma\rangle \to \langle c, \sigma'\rangle}$$

$$\frac{\langle gc_0, \sigma\rangle \to \mathbf{fail} \qquad \langle gc_1, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}{\langle gc_0 \mathbin{[\!]} gc_1, \sigma\rangle \to \mathbf{fail}}$$