ソフトウェア基礎論配布資料
単純型付 λ 計算—補遺

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科知能情報学専攻
e-mail: `igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp`

平成 16 年 11 月 16 日

4 諸性質

4.1 定理 [Uniquness of Typing]: $\Gamma \vdash t : T$ かつ $\Gamma \vdash t : T'$ ならば $T \equiv T'$ である．

4.2 定理 [Type Preservation]: $\Gamma \vdash t : T$ かつ $t \longrightarrow_v t'$ ならば，$\Gamma \vdash t' : T$ である．

4.3 定理 [Progress]: $\bullet \vdash t : T$ ならば t は値であるか，ある項 t' が存在して $t \longrightarrow_v t'$ である．

4.4 定理 [Normalization]: $\Gamma \vdash t : T$ かつ t が `fix` を含まないならば $t \longrightarrow_v t_1 \longrightarrow_v \cdots \longrightarrow_v t_n \longrightarrow_v \cdots$ なる無限列は存在しない．

5 Type Preservation と Progress の略証

5.1 Lemma [Inversion]:

1. もし $\Gamma \vdash \lambda x{:}T_1.t_0 : T$ ならば，T_1, T_2 が存在して $T \equiv T_1 \rightarrow T_2$ かつ $\Gamma, x : T_1 \vdash t_0 : T_2$ が成立する．
2. もし $\Gamma \vdash t_1\ t_2 : T$ ならば，T_1 が存在して $\Gamma \vdash t_1 : T_1 \rightarrow T$ かつ $\Gamma \vdash t_2 : T_1$ が成立する．
3. もし $\Gamma \vdash \texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3 : T$ ならば，$\Gamma \vdash t_1 : \texttt{bool}$ かつ $\Gamma \vdash t_2 : T$ かつ $\Gamma \vdash t_3 : T$

などなど．

Proof: (変数参照項を除いて) 項について適用できる型付け規則がひとつなので，型付け規則を逆 (下から上) に読むことによって明らか． □

5.2 Lemma [Substitution Preserves Typing]: $\Gamma, x : T' \vdash t : T$ かつ $\Gamma \vdash t' : T'$ ならば $\Gamma \vdash [x \mapsto t']t : T$ が成立する．

Proof: $[x \mapsto t']t \equiv \Downarrow_x([(\Uparrow_x t')/x]t)$ に注意すると，以下の三つを示せばよい，

- $\Gamma \vdash t : T$ ならば $\Gamma, x : T' \vdash \Uparrow_x t : T$

- $\Gamma, x : T' \vdash t : T$ かつ $x \notin FV(t)$ ならば $\Gamma \vdash \Downarrow_x t : T$
- $\Gamma, x : T' \vdash t : T$ かつ $\Gamma, x : T' \vdash t' : T'$ ならば $\Gamma, x : T' \vdash [t'/x]t : T$ かつ $x \notin FV([t'/x]t)$

最初の二つは，項の構成に関する帰納法で証明できる．最後のものは，命題をもう少し一般化してから，型付け関係の導出に関する帰納法で証明できる． □

Proof of Type Preservation: $t \longrightarrow_v t'$ の導出に関する帰納法で証明する．帰納法の base に相当するのは Ev-AbsApp など前提のない規則で $t \longrightarrow_v t'$ が導出された場合である．

- 規則 Ev-AbsApp の場合，ある x, T', t_0, v_2 が存在して $t \equiv (\lambda x{:}T'.t_0)\ v_2$ かつ $t' \equiv [x \mapsto v_2]t_0$ である．Inversion より，$\Gamma, x : T' \vdash t_0 : T$ かつ $\Gamma \vdash v_2 : T'$ が成立する．Substitution Preserves Typing より $\Gamma \vdash [x \mapsto v_2]t_1 : T$ つまり $\Gamma \vdash t' : T$ である．
- 規則 Ev-FixAbs の場合，...
- 規則 Ev-PlusZero の場合，...
- などなど．

帰納法のステップに相当するのは，前提のある規則で $t \longrightarrow_v t'$ が導出された場合である．この時，前提として成立している $t_0 \longrightarrow_v t'_0$ に関しては Type Preservation が成立しているとしてよい (帰納法の仮定)．

- 規則 Ev-App1 の場合，ある t_1, t_2, t'_1 が存在して $t \equiv t_1\ t_2$ かつ $t' \equiv t'_1\ t_2$ かつ $t_1 \longrightarrow_v t'_1$ が成立する．Inversion より，ある T_1 が存在して $\Gamma \vdash t_1 : T_1 \to T$ かつ $\Gamma \vdash t_2 : T_1$ である．帰納法の仮定より $\Gamma \vdash t'_1 : T_1 \to T$ が成立する．T-App より $\Gamma \vdash t'_1\ t_2 : T$ が導出できる．
- などなど． □

5.3 Lemma [Canonical Forms]:

1. もし $\bullet \vdash v : T_1 \to T_2$ ならば，ある x, T_1, t_0 が存在して $v \equiv \lambda x{:}T_1.t_0$ が成立する．
2. もし $\bullet \vdash v : \texttt{nat}$ ならば， $v \equiv \texttt{0}$ またはある n が存在して $\texttt{S}(n)$ が成立する．
3. もし $\bullet \vdash v : \texttt{bool}$ ならば， $v \equiv \texttt{true}$ または $v \equiv \texttt{false}$

Proof of Progress: 型付け関係 $\bullet \vdash t : T$ に関する帰納法で証明する．t の形で場合分けを行なう．

- $t \equiv \texttt{\#}^n x$ の場合はあり得ない．
- $t \equiv \lambda x{:}T.t_0$ の場合，t は値である．
- $t \equiv t_1\ t_2$ の場合，Inversion より，ある T_1 が存在して $\bullet \vdash t_1 : T_1 \to T$ かつ $\bullet \vdash t_2 : T_1$ が成立する．帰納法の仮定より t_1 が値であるか，ある t'_1 が存在して $t_1 \longrightarrow_v t'_1$ である．前者の場合，Canonical Forms より $t_1 \equiv \lambda x{:}T_1.t_0$ であるので，Ev-AbsApp より $t_1\ t_2 \longrightarrow_v [x \mapsto t_2]t_0$ を導出することができる．一方，後者の場合，Ev-App1 より $t_1\ t_2 \longrightarrow_v t'_1\ t_2$ を導出することができ，結局 $t \longrightarrow_v t'$ なる t' が存在する．
- などなど． □