伝聞の様相論理

竹内泉

Abstract

We can extract some information from a wrong testimony. There have been some systems of propositional modal logic called logic of beleaf and knowledge, and they explain this extraction. On the other hand, predicate logic for wrong testimony has not been studied enough. This work proposes a logical system of predicate modal logic which explains such extraction. Especially, our logical system explains the extraction from a testimony which involves misidentification of individuals.

■目的

本稿では伝聞を表す様相演算を備えた述語論理を提案する。伝聞を表す様相演算とは即ち、$\Box P$ が「彼は P と言った」という意味を表すような様相演算のことである。更に厳密には、$\Box P$ に於ける P は言語的な発言の断片ではなく、その論理的な意味内容である。つまり、$\Box P$ は「彼が言ったことは P を含意する」という意味を表す。

伝聞の論理の大きな困難は個体同定にある。二つの物を混同していたり、同じ物を違う物だと思っていたり、また、ある物の存在を知らなかったり、無い物を有ると思っていたり、ということはよくある。このような場合の問題提起が文献 [2] 6 章にある。伝聞の論理では、このような個体同定の混乱に対処することを目的とする。

発言者と聴取者の間で個体同定が一致している場合に対応した論理体系は既に幾つか提案されている。多くは、個体領域を共有する多重世界模型によって意味を与えるものである。個体領域を共有していない模型でも、代入律が成り立つ模型についてはクリプキ層などと呼ばれ、特に数学の立場から研究されてきた。代入律が成り立つとはつまり、$x = y \supset \Box x = y$ が恒真になるということである。しかし、個体同定が一致せず、代入則も成り立たない場合に対応した論理体系は今迄十分研究されていかった。

代入律が成り立たない論理に於いて意味論を設計する上で困難となることは、様相記号の作用域の中にある項の指示対象が特定できないという点にある。特に項の中の変数が様相の外から束縛された時にこの問題は顕著となる。本稿ではこの困難に対処する為に、論理式中に現れる原子論理式に全て何某かの真偽値を割り当てるという方針を放棄する。

標準的な古典論理の意味論やクリプキ以降の多重世界意味論では、論理式の中の項は全てその指示対象が個体領域の中に有り、論理式は原子論理式からその外側へ向かって真偽の評価がなされてきた。その後、指示対象が無い

ような項を備えた述語論理の意味論が提案された。（文献 [3] Ch. 2, Sect. 2, 50 頁~ ）この意味論では、論理式の中の全ての部分論理式に真偽値が割り当てられている。

本稿でいう意味論とは、論理式の間の論理関係を定めるものである。項の指示対象を考えることはせず、また、単独の論理式に対してその真偽を定めるものでもない。

■射程

論理学の目的は、論理構造を分析したい問題に対して、その簡明な形式的模型を与えることにある。形式的模型は、その射程が広くなれば簡明さが失われる傾向にある。論理体系を設計する際には、何が目的であって何が目的ではないのかを明らかにしていかなければならない。

本稿での議論の射程を明らかにする為に、具体例を挙げる。

「目撃者は容疑者を指差して証言した。

『この人が犯人です。この人が二階で人を殺して窓から突き落とすのを確かに見ました。』

これが容疑者の無実の決定的な証拠となった。犯行当時、容疑者はその建物の三階にいたことが証明されていた。そして、その時は夕暮で、向かいの建物から見ていた目撃者には人の顔ははっきりとは見えない時間帯であった。」

この挿話には論点が幾つもある。例えば、刑事手続で云う証明とはどの程度の確かさを求めるものなのか。あるいは、何故この目撃者が正直に証言していると言えるのか。この証言の内、容疑者が犯人であると言っている部分は間違いで、犯行は二階であったと言っている部分は正しいとするのは何故か。そのような蓋然性評価は如何に行なわれるのか。等々。しかし本稿ではその点には言及しない。

本稿の目的は以下の点である。犯行当時容疑者は三階にいた。目撃者は容疑者が犯人だといっているがそれは見間違えである。目撃者が犯行は二階だったと証言しているのだから、犯行は二階であった。この三項を前提すると、容疑者の無実が推論される。この推論を形式化すると如何なる論理体系が得られるか。このことを議論し、伝聞の論理を提案する。即ち、証人は容疑者が犯人であると明らかに証言しているにも拘らず、その証言自体が容疑者無罪の証拠となっていることを説明する。

本稿では、多重伝聞は論じない。即ち、「私は彼から斯く斯くと聴いた。」という証言があった、因って云々、という推論は対象としない。

■文脈意味論

本稿の様相演算の意味は他人の発言から推論されることである。論理的な推論を語っているのだから、その意味論には文献 [5] にある文脈意味論を用いるのが適当である。

文献 [5] の文脈意味論では、様相演算は論理的妥当性を表した。即ちこれは論理的妥当性の論理である。この論理体系について概略を説明する。この

意味論は、論理式の真偽値を定めるものではなく、論理式相互の導出関係を定める。この意味論は論理式 P と、様相記号を含まない論理式の列 C、D の三項関係 $\langle C, D\rangle \models P$ によって表される。直感的には、P の中の様相記号を「C から論理的に導出される」と読み、三項関係 $\langle C, D\rangle \models P$ は、C と D を仮定して P が導出されることを表す。技術的には、三項関係 $\langle C, D\rangle \models P$ は論理式 P の構成に関する帰納法によって定義される。詳細はここでは説明しない。任意の無矛盾な C と D に対して $\langle C, D\rangle \models P$ が成り立つことを、P は恒真であると云う。恒真な式は三段論法、量化子の具体化や一般化に関して閉じでいるので、ある論理を定めていると言える。この論理の命題論理部分は S5 となる。

本稿では様相は伝聞を表すのであるから、$\Box P \supset P$ は恒真ではない。即ちＴ公理は不適当である。本稿で提案する伝聞の論理では、命題論理部分はＫ公理、４公理、５公理からなるような様相論理である。

■個体観念の共有

本稿では、文献 [5] の文脈意味論を、本稿の目的に従って変形する。

論理的妥当性の論理の述語論理部分では $\Box(\exists x)P \supset (\exists x)\Box P$ が恒真である。これは項の指示対象が個体ではなく個体観念であることを表している。発言者と聴取者とが同じ名前で違う物を指していることはある。そこで伝聞の論理でも項の指示対象は個体観念であるように設計する。

さて、論理的妥当性の論理では $(x)(P \vee \Box Q) \supset (x)P \vee \Box(x)Q$ が恒真となる。これは、様相記号の中の変数と外の変数を同時に束縛したとしても、それは構文上だけのものであって、その変数が同じ個体を指していることは保証されないということである。同じ名前の変数を使いながら、その指示対象の同一性が確保されていないのだから、発言者と聴取者とは変数の共有によって個体観念を共有することができないことを示す。意思疎通には個体観念の共有は必須であり、（文献 [4] ）変数の共有によって個体概念の共有が表現できないのは、一階述語論理としては不便に過ぎる。

そこで本稿では、個体観念の共有を表す述語 C を導入する。項 t に対して $C(t)$ とは、項 t の意味する個体観念を発言者と聴取者とが共有していることを表す。即ち

$$C(t) \supset (t = u \supset\subset \Box t = u)$$

が恒真となる。$-C(t)$ は個体観念を共有していないということであり、即ち

$$(x)(-C(x) \supset P \vee \Box Q) \supset$$
$$(x)(-C(x) \supset P) \vee (x)(-C(x) \supset \Box Q)$$

が恒真となる。

論理的妥当性の文脈意味論では、

$$\langle C, D\rangle \models P$$

という図式によって論理式 P を評価した。ここで C は論理的妥当性を判断する為の前提を表し、D は実際に正しい事象を表す。

伝聞の論理の文脈意味論では

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models P$

という図式を用いる。t_1、t_2、…、t_n は発言者と聴取者とが共有している個体観念を表す。これを共有観念項と呼ぶ。D は発言者の発言の意味内容であり、E は論理式 P を評価する為の聴取者の認識または仮定である。D や E は矛盾しているかも知れない。

論理的妥当性の文脈意味論に倣って、D を透過文脈と呼び、E を不透過文脈と呼ぶ。項の列にある項は共有項と呼ぶ。論理的妥当性の文脈意味論では、透過文脈と不透過文脈は論理式の列であったが、本稿ではその連言を取って、単一の論理式とする。

■言語

伝聞の論理に於ける論理式は様相一階述語論理である。以下のような文法範疇がある。

- 変数は十分多くある。
- 函数記号と項は標準的な一階述語論理のものである。
- 述語は、等号を含む標準的な一階述語論理のものの他に、特別な単項述語 C が有る。この C を観念共有の述語と呼ぶ。
- 原子論理式は標準的な一階述語論理のものである。項 t に対して $C(t)$ は原子論理式である。
- 論理記号は否定「$-$」、連言「$\&$」、全称「(x)」に加えて、様相記号「$\Box$」が有る。

古典論理の論理記号は文献 [1] に倣った。

煩雑な括弧を避ける為に、単項演算の記号は二項演算の記号よりも結合力が強いと見做す。例えば「$-P\&Q$」は「$(-P)\&Q$」のことである。

様相記号 $\Box$ と観念共有の述語 C を含まない論理式のことを古典論理式と呼ぶ。

以下の略記法を用いる。

$t \neq u \equiv -t = u,\ P \supset Q \equiv -(P\& - Q),$

$P \vee Q \equiv -P \supset Q,\ P \supset\subset Q \equiv (P \supset Q)\&(Q \supset P),$

$(\exists x)P \equiv -(x) - P,\ \Diamond P \equiv -\Box - P,\ D(t) \equiv -C(t),$

$T \equiv P \supset P,$

但しここで P は辞書式順序で一番小さい閉古典論理式,

$C() \equiv T,$

$C(t_1, t_2, ..., t_n) \equiv C(t_1)\&C(t_2)\&...\&C(t_n),$

$\Delta() \equiv T,\ \Delta(t) \equiv T,$

$\Delta(t_1, t_2, ..., t_n) \equiv t_1 \neq t_2\&t_1 \neq t_3\&...\&t_{n-1} \neq t_n$

$C(\vec{t})$ は、$\vec{t}$ 中の各項の指示する観念が共有されていることを意味する。$\Delta(\vec{t})$ は、$\vec{t}$ 中の各項の指示対象が個体としては皆互いに異なることを意味する。$\vec{t}$ が空列の場合、$C()$ と $\Delta()$ は何にも言及していないので、恒真であるように定義する。$\vec{t}$ がただ一ヶの項の場合、$\Delta(\vec{t})$ は矢張り何にも言及していないので、恒真であるように定義する。

二項演算の中では、$\&$ の結合力が一番強く、以下順に $\vee$、$\supset$ と続き、$\supset\subset$ の結合力が一番弱い。

■意味論の定義

論理式の評価は評価関係 $\models$ によって行なう。これは文脈と呼ばれる図式と論理式との間の二項関係である。

文脈とは、共有項の列と透過文脈と不透過文脈との三つ組である。即ち

$$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle$$

という形をした図式である。ここに共有項の列

$$t_1, t_2, ..., t_n$$

は相異なる項の列である。また、透過文脈 D と不透過文脈 E は古典論理式である。

評価関係

$$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models P$$

は「論理式 P はこの文脈によって成り立つ」と読む。この関係は右辺の論理式 P の構成に沿って再帰的に定義する。これは文脈との関係を定義しているのであって、真偽値を定めるものではない。

- 観念共有の述語による原子論理式 $C(t)$ に対して

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models C(t)$$

  とは、ある t_i があって

  $$\Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&E \supset t = t_i$$

  が古典論理の定理となることである。

- 観念共有の述語以外の述語による原子論理式 A に対して

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models A$$

  とは、

  $$\Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&E \supset A$$

  が古典論理の定理となることである。

- $P\&Q$ に対して

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models P\&Q$$

  とは

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models P$$

かつ $\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models Q$

となることである。

- $-P$ に対して

  $\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models -P$

  とは、

  $\Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&E\&E'$

  が古典論理で無矛盾であるような如何なる古典論理式 E' に対しても

  $\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\&E'\rangle \models P$

  とはならないことである。

- $(x)P$ に対して

  $\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models (x)P$

  とは、

  $$\Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&D \supset (\exists y)Q,\ \Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&E \supset (\exists y)R$$

  が古典論理の定理であるような新しい変数 y と任意の論理式 Q、R に対して

  $\langle t_1, t_2, ..., t_n; D\&Q, E\&R\rangle \models P[y/x]$

  となることである。

- $\Box P$ に対しては、

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models \Box P$$

  とは、

  $$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, D\rangle \models P$$

  となることである。

文脈は、任意の論理式 P に対して P か $-P$ かどちらかを成り立たせる訳ではない。特に、$\Delta(t_1, t_2, ..., t_n)\&E$ が矛盾している時には、常に

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models P$

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models -P$

が両方とも成り立つ。

普遍量化の解釈の定義に於ける論理式 Q、R は、y に関する記述を表す。

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, E\rangle \models (x)P$

の直感的な意味は、任意の項 t、t' に対して、

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D\&y = t, E\&y = t'\rangle \models P[y/x]$

となることである。ここで云う項とは記述をも含むものである。

論理式の中で様相記号が二重に現れることは予定していないので、様相記号の中を解釈している途中では透過文脈を参照することはない。即ち、様相記号の解釈の定義に於いて

$\langle t_1, t_2, ..., t_n; D, D\rangle \models P$

となっている箇所では、実は透過文脈は何でもいいのだが、公理化の際に必然性規則が成り立つようにする為にこのように定義した。

記号 $N \models P$ 及び $\models P$ を定義する。共有観念項が N ヶ以下であるような任意の文脈によって論理式 P が正しくなる時、$N \models P$ と書いて、P は N ヶ以下の共有観念の下で恒真であると読む。任意の 0 以上の整数 N で $N \models P$ となる時、 $\models P$ と書いて、P は恒真であると読む。

この意味論では以下が成り立つ。

［定理］

1. 任意の文脈 C に対して、$C \models P \supset Q$ かつ $C \models P$ ならば $C \models Q$ 。
2. $\models P$ かつ $\models -P$ となることはない。
3. F が命題変数 X_1、X_2、…、X_n から成る古典論理の定理である時、その各 X_i に論理式 P_i を代入して得られる論理式

   $$F[P_1/X_1, P_2/X_2, ..., P_n/X_n]$$

   は恒真である。

即ちこの意味に於いて、この意味論は何某かの論理を定めているといえる。

この意味論は、Ｃ $\models$ Ｐという関係をＰの構成に関して再帰的に定義しているが、だからといってＰの部分論理式全てに単独で真偽値を付与するものではない。飽くまでも共有観念、透過文脈、不透過文脈との相対的な関係を述べているだけである。

■意味論の恒真式

この意味論で恒真となるものを幾つか挙げる。

1°$\models C(x) \supset\subset \Box C(x)$

2°$\models C(x) \supset (x = y \supset\subset \Box x = y)$

3°$\models (x)\Box P \supset \Box(x)P$

4°$\models \Box(\exists x)(-C(x)\&P) \supset (\exists x)(-C(x)\&\Box P)$

5°$\models (\exists x)(-C(x)\&P)\&(\exists x)(-C(x)\&\Box Q)$
$\qquad \supset (\exists x)(-C(x)\&P\&\Box Q)$

この１°と２°は、共有観念であることと共有観念の同等性とにとって、様相は透明であることを表している。また４°と５°が示していることは、共有観念でない場合には量化と様相は、文献 [5] にある論理的妥当性の論理の場合と同様に振舞う、ということである。

一方で、２°に於いて $C(x)$ という仮定が無い場合には、

$x = y \supset \Box x = y$

も

$\Box x = y \supset x = y$

も恒真でない。

■公理化

$\models P$ となるような論理式 P 全体は Π^0_2 完全集合となる。即ち、$\models$ によって定まる論理は公理化可能ではない。しかし N を固定した場合には、$N \models P$ となるような論理式 P 全体は再帰的枚挙可能である。因って「$N \models$ 」で定義される論理を公理化する。

証明系は、以下の推論規則によって定義される。ここに N はある固定された 0 または正の整数である。

[1: 分離規則] $P \supset Q$ と P から Q を導出する。

[2: 一般化規則] P から $(x)P$ を導出する。

[3: 必然性規則] P から $\Box P$ を導出する。

[4: 始式] 以下の形をしたものは始式として導出する。

(4.1: 古典命題論理) F が命題変数 X_1、X_2、…、X_n から成る古典命題論理の定理である時、その各 X_i に論理式 P_i を代入して得られる論理式

$F[P_1/X_1, P_2/X_2, ..., P_n/X_n]$

(4.2: 具体化) $(x)P \supset P[t/x]$

(4.2: 量化の移動) $(x)(P \supset Q) \supset P \supset (x)Q$

但し P の中に x は自由には現れない。

(4.4: K 公理) $\Box(P \supset Q) \supset \Box P \supset \Box Q$

(4.5: 4 公理) $\Box P \supset \Box\Box P$

(4.6: 5 公理) $\Diamond P \supset \Diamond\Box P$

(4.7: 代入) $x = y \supset P[y/x]$

(4.8: 共有観念の共有性) $C(x) \supset\subset \Box C(x)$

(4.9: 共有観念の同一性) $C(x) \supset (x = y \supset\subset \Box x = y)$

(4.10: 量化の分配)

$(\exists x)(-C(x)\&P\&\Box Q\&\Diamond R_1\&\Diamond R_2\&...\&\Diamond R_n) \supset$
$(\exists x)(-C(x)\&P)\&\Box(\exists x)(-C(x)\&Q)$
$\&\Diamond(\exists x)(-C(x)\&Q\&R_1)\&\Diamond(\exists x)(-C(x)\&Q\&R_2)$
$\&...\&\Diamond(\exists x)(-C(x)\&Q\&R_n)$

(4.11: 共有観念の数)

$(\exists x_1)(\exists x_2)...(\exists x_N)($
$C(x_1, x_2, ..., x_N)$
$\&(y)(C(y) \supset y = x_1 \vee y = x_2 \vee ... \vee y = x_N)$
$)$

N が 0 の時は、$(y) - C(y)$

［定理］任意の論理式 P に対して、$N \models P$ と、この証明系で定理であることとは同値である。

論理の形式的意味論には、公理化の他に模型による表示的意味論もある。表示的意味論の異種である可能世界模型を構成することは、他の論理と比較する為には有用である。本稿では公理化のみに言及したが、この論理に対しても文献 [5] にあるのと同様に可能世界模型を構成することが出来る。

■例題の解答

先に出した例題に戻ろう。この例題では、

１°容疑者が犯人であるという証言があったが、見間違いかも知れない。

２°犯行は二階であったという証言があり、この証言は信用できる。

３°犯行当時、容疑者は三階にいたので、二階にいる筈は無い。

このことから容疑者無罪を推論している。

まず、定項として a、b、c を、また述語として $M(-,-)$ と $H(-,-)$ を用いる。a は容疑者を、b はその該当する建物の二階を、c はその三階をそれぞれ表す。この述語では、$M(t,u)$ は「犯人 t が犯行現場 u に於いて当該犯行に及んだ」を意味し、$H(t,u)$ は「犯行当時、人物 t が場所 u にいた」を意味する。

次に、仮定として使う論理式を幾つか定義する。

$$P \equiv (x)(y)(\Box M(x,y) \supset (\exists x')(\exists y')(M(x',y')\&\Box(x=x'\&y=y')))$$

$$Q \equiv (x)(y)(x')(y')(M(x,y) \supset M(x',y') \supset y=y')$$

$$R \equiv (x)(y)(M(x,y) \supset H(x,y))$$

$$S \equiv (x)-(H(x,b)\&H(x,c))$$

各論理式の意味はこのようなものである。P の意味は、証人が犯行があったと言っているならば、犯行はあった、ということである。Q は、犯行場所は一ヶ所である、ということを意味する。R は、犯人は犯行現場にいた、ということを意味する。S の意味は、その建物では二階と三階と両方にいることは出来ない、ということである。

さて、まず証人が容疑者の見間違いをしていない場合を考えよう。そのことは、仮定に $C(a)$ を加えることによって表現される。

$$\models C(a)\&C(b)\&P\&\Box M(a,b) \supset M(a,b)$$

これが恒真となる、即ち、証言は容疑者の容疑の証拠となる。

しかし、証人が容疑者の見間違いをしているかも知れない場合には、仮定に $C(a)$ を加えることが出来ない。この時には、

$$C(b)\&P\&\Box M(a,b) \supset M(a,b)$$

は恒真とはならない。また一方で

$$C(b)\&P\&\Box M(a,b) \supset -M(a,b)$$

もまた恒真ではない。この論理は単調論理なので、仮定を減らすことによって結論を増やすことは出来ない。

ここで他の仮定を追加すると、

$\models C(b) \& P \& Q \& R \& S \& \Box M(a,b) \supset M(a,b)$
これが恒真となる、即ち、証言は容疑者無実の証拠となる。

■効用と課題

この意味論では、個体同定について誤りがあるような証言から何某かの情報を引き出すことは、如何にして行なわれるかが説明できる。

一般に、他人の信念や証言から情報を引き出すには、様相化されていない論理式 P と P' が何かあって $\Box P \supset P'$ という仮定が必要である。この仮定によって、証言の信憑性を表現することが出来る。例えば証言中に論理式 P と Q が主張されていて、P は信用できるが Q は信用できない、というような状況は、$\Box P \supset P$ を仮定して $\Box Q \supset Q$ を仮定しない、ということによって表現できる。

もし証人の証言が矛盾していれば、如何なる論理式 P についても $\Box P$ が正しくなってしまうので、$\Box P \supset P'$ のような仮定によって証言から情報を取り出すことはできない。本稿の意味論では $x = y \supset \Box x = y$ や $x \neq y \supset \Box x \neq y$ が恒真でない為に、個体同定が間違っているような証言も矛盾せずに済んでいる。そして、証言中の個体同定について、$C(t)$ という論理式を仮定することによってその信憑性を保証する。

今後は、個体同定のみならず、ある部分は矛盾しているが別の部分は信用できるような証言からも情報を引き出せるような意味論の設計が期待される。

謝辞

岡本賢吾氏には、研究の途上で議論に応じて戴いた。ここに感謝の意を表する。

文献

[1] レモン「論理学初歩」、竹尾治一郎、浅野楢英訳、世界思想社、1973 年
[2] 野本和幸「論理学の現代意味論」岩波書店、1988 年
[3] トロエルストラ、ファン＝ダーレン（A.S. Trorelstra & D. van Dalen）「Constractivism in Mathematics, vol. I」North-Holland、1988 年
[4] 柴田正良「ロボットの心」講談社新書、2001 年
[5] 竹内泉『様相論理の文脈意味論』「科学哲学」36 巻 1 号所収、2003 年