

# 項書換系の完備化を用いた Coq の等式証明プラグイン

矢島創一 \*1 池淵未来 \*1

\*1 京都大学

## 概要

- ・ 証明支援システム Coq のための、自動で等式証明を行うプラグインを開発
- ・ 項書換系の完備化を利用

## 項書換系の完備化

**項書換系:** 項をいくつかの規則によって書き換える 例  $0 + X \Rightarrow X$  によって  $0 + Y$  を  $Y$  に書換

**完備な項書換系:** 停止性と合流性が成り立つもの

- ・ 停止性: 無限の簡約列が存在しない
- ・ 合流性: ある項が2つの規則によって異なる項になっても、それぞれを簡約すると同じ項になる

**完備化:** 与えられた規則の集合 (公理) を完備にする手続き

- ・ 冗長な規則の削除 … 項書換系による簡約が変わらない範囲で規則を消したり簡単な形に変える
- ・ 危険対が合流するような規則の追加 … 下記 実装のアイデア(③)で説明

完備化できた項書換系の規則に従って等式の両辺を簡約すれば等しい項になり、等式を証明できる

## 実装のアイデア

- ・ 既存ツールの **Toma** を利用: テキストファイルの入力に対して、完備化手続きを行う
- ・ **OCaml** で Toma を利用する Coq プラグインを実装

### 公理:

$$0 + X = X$$

$$(-X) + X = 0$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$

テキスト形式に  
変換・入力

**Toma**

出力

①:  $0 + X \rightarrow X$

②:  $(-X) + X \rightarrow 0$

③:  $(X + Y) + Z \rightarrow X + (Y + Z)$

新規③:  $(-X) + (X + Y) \rightarrow 0 + Y$

理由:  $((-X) + X) + Y$  を①と②でそれぞれ書き換えた項が合流しないため

新規④:  $(-X) + (X + Y) \rightarrow Y$

理由: ③は①で簡約できるため

⋮

完了: 規則は①, ②, ④, ③, …

出力をパース & Coq 上で再現

→ 公理から証明

$$\begin{aligned} & (-X) + (X + Y) \\ &= ((-X) + X) + Y \\ &= 0 + Y \text{ により証明} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-X) + (X + Y) \\ &= 0 + Y = Y \text{ により証明} \end{aligned}$$

→ 対応する規則を  
Coq の書換ヒントDB に追加

## 今後の課題: 対応できる項書換系を増やすこと

**動作する項書換系:** 群の公理のみからなる項書換系等、Knuth-Bendix 完備化で完備化可能なもの  
**現状うまく動作しない項書換系:** 可換則等、両辺の順序が付けられない公理を含むもの