

工学部専門科目「計算と論理」配布資料

カリー・ハワード同型対応

五十嵐 淳

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻

cal24@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

January 7, 2025

カリー・ハワード同型対応 (*Curry-Howard isomorphism*)¹は、論理の証明体系と型付の計算体系における諸概念が対応している、という考え方である。この際、対応の区となるのが「命題を型として捉える」もしくは「導出をプログラムとして捉える」という観点である。この考えは、Coq などの多くの証明支援系の設計の原理となっている。

1 「ならば」の論理 vs. 単純型付ラムダ計算

まずは、左の「ならば」の論理の導出規則と右の単純型付ラムダ計算の型付け規則を比べてもらいたい。

$$\begin{array}{c} \frac{(H : P \in \Gamma)}{\Gamma \vdash P} \quad (\text{ASSUMPTION}) \qquad \frac{(x : T \in \Gamma)}{\Gamma \vdash x : T} \quad (\text{T-VAR}) \\[10pt] \frac{\Gamma, H : P \vdash Q \quad (H \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash P \rightarrow Q} \quad (\rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma, x : S \vdash M : T \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \text{fun } x : S \Rightarrow M : S \rightarrow T} \quad (\text{T-FUN}) \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash P \rightarrow Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \quad (\rightarrow E) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : S \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : S}{\Gamma \vdash M N : T} \quad (\text{T-APP}) \end{array}$$

型付け規則の判断から「 $M :$ 」部分を除けば、実質的に「ならば」の論理の導出規則になることがわかるだろう。原子命題を `nat` や `bool` の代わりの基本型として、項の種類を変数、`fun`、関数適用に限った単純型付ラムダ計算を考えると、命題が証明できることが、(命題を型として読みかえた時) その型を持つ項が存在することの必要十分条件になっていることがわかる。

これがカリー・ハワード同型対応の基本である。

¹この名前は対応を発見・展開した(主な)人物である Haskell B. Curry (1900–1982) と William A. Howard (b.1926) に由来している。

論理の世界	計算の世界
命題	型
「ならば」	関数型 ($\rightarrow$)
文脈	型環境
仮定の名前	変数
(証明の) 導出規則	型付け規則
証明可能	その型を持つ項が存在する

2 プログラムは証明である

上の対応は単純型付ラムダ計算から項 (つまりプログラム) を「無視する」ことで得られたが、論理体系において項に相当するものはあるのだろうか？実は、それは証明 (つまり導出) である。

その感覚をつかむには以下の事実がヒントとなる。

事実 1 単純型付ラムダ計算において型付け関係 $\Gamma \vdash M : T$ が導出できるならば、その導出は Γ , M から一意に定まる。

これは、項の形それぞれに、型付け規則がひとつ用意されていることから明らかである。特に、 M を見れば、規則がどういう順番で使われるか決定される、ということである。つまり、単純型付ラムダ計算の項は、型付け関係の導出をコード化したものであり、導出を生成する DNA のような (?) 役割ができるのである。型付け関係の導出は (項を無視することで) 命題の証明になるのであるから、項は命題の証明 (導出) をプログラムの形で書いたもの、とすることができる。逆に、命題の証明 (導出) から、項を得ることもできる。

すなわち

論理の世界	計算の世界
$\vdots$	$\vdots$
証明 (導出)	項

ということである。例えば

「 A ならば A 」の証明は `fun x:A => x` というプログラムである

ことになる。しかし、これは単なる記号法の類似なのだろうか。プログラムにおいて本質的な「計算」(ラムダ計算であれば簡約) は論理においてどんな役割があるというのだろうか。

この疑問はひとまず脇に置いておいて、対応関係が「ならば」の論理だけでなく、適当な型をラムダ計算に導入することで命題論理へと拡張できることを見る。

3 対応の命題論理への拡張

連言と直積型

論理結合子「かつ」に対応する型は「ペア」(直積型) である。

$$\begin{array}{lcl}
\text{(types)} & S, T & ::= \dots \mid S * T \\
\\
\text{(terms)} & M, N & ::= \dots \mid (M_1, M_2) \mid \text{fst } M \mid \text{snd } M \\
& & \mid \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} \\
\\
& & \text{fst } (M_1, M_2) \longrightarrow M_1 \quad (\text{R-FST}) \\
& & \text{snd } (M_1, M_2) \longrightarrow M_2 \quad (\text{R-SND}) \\
\\
& & \text{match } (M_1, M_2) \text{ with } (x, y) \Rightarrow N[x, y] \text{ end} \longrightarrow N[M_1, M_2] \quad (\text{R-MATCHP}) \\
\\
& & \frac{\Gamma \vdash M : S \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash (M, N) : S * T} \quad (\text{T-PAIR}) \\
\\
& & \frac{\Gamma \vdash M : S * T}{\Gamma \vdash \text{fst } M : S} \quad (\text{T-FST}) \\
\\
& & \frac{\Gamma \vdash M : S * T}{\Gamma \vdash \text{snd } M : T} \quad (\text{T-SND}) \\
\\
& & \frac{\Gamma \vdash M : T_1 * T_2 \quad \Gamma, x : T_1, y : T_2 \vdash N : S}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } (x, y) \Rightarrow N \text{ end} : S} \quad (\text{T-MATCHP})
\end{array}$$

選言と直和型

論理結合子「または」に対応する型は直和型と呼ばれる型であり、 $S + T$ 型の値は S の値か T の値のいずれか (に、どちら由来の値かを示すタグをつけたもの) となる。Coq で書くと以下のような型定義になる。

```

Inductive sum (X Y : Type) : Type :=
  | left (x : X)
  | right (y : Y).

```

例えば、`left nat bool 2` や `right nat bool true` はいずれも `sum nat bool` 型を持つ。sum 型の値を使う時には、真偽値やリストなどと同様に、`match` でタグの場合分けをすることになる。

$$\begin{array}{lcl}
\text{(types)} & S, T & ::= \dots \\
& & \mid S + T \\
\\
\text{(terms)} & M, N & ::= \dots \\
& & \mid \text{left}_{S,T} M \quad (\text{型引数は重要な場合に添字として表記する}) \\
& & \mid \text{right}_{S,T} M \\
& & \mid \text{match } M \text{ with left } x \Rightarrow N_1 \mid \text{right } y \Rightarrow N_2 \text{ end}
\end{array}$$

計算規則:

$$\begin{aligned} \text{match left } M_1 \text{ with left } x \Rightarrow N_1[x] \mid \text{right } y \Rightarrow N_2 \text{ end} &\longrightarrow N_1[M_1] \\ \text{match right } M_2 \text{ with left } x \Rightarrow N_1 \mid \text{right } y \Rightarrow N_2[y] \text{ end} &\longrightarrow N_2[M_2] \end{aligned}$$

型付け規則:

$$\frac{\Gamma \vdash M : S}{\Gamma \vdash \text{left}_{S,T} M : S + T} \quad (\text{T-LEFT})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : T}{\Gamma \vdash \text{right}_{S,T} M : S + T} \quad (\text{T-RIGHT})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : S_1 + S_2 \quad \Gamma, x : S_1 \vdash N_1 : T \quad \Gamma, y : S_2 \vdash N_2 : T \quad (x, y \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with left } x \Rightarrow N_1 \mid \text{right } y \Rightarrow N_2 \text{ end} : T} \quad (\text{T-SMATCH})$$

まとめ:

論理	計算
⋮	⋮
「かつ」	直積型
「または」	直和型
導入規則	値の構築 (コンストラクタ, または fun)
除去規則	値の使用 (match または関数適用)

4 証明の回り道と証明の正規化

一般にひとつの命題の証明には何通りもの方法があるが、証明の中には無駄な推論ステップを含んでいるものがある。例えば、

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash P} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash Q}}{\Gamma \vdash P \wedge Q} \wedge\text{-I}}{\Gamma \vdash Q} \wedge\text{-E2}$$

という導出を考える。この最終的な結論は $\Gamma \vdash Q$ だが、それは既に上で得られているものであり、最後の $\wedge\text{-I}$, $\wedge\text{-E2}$ の2ステップは無駄である。このような、ある結合子の導入の直後にその結合子を除去している部分を証明の回り道 (*detour*) と呼ぶ。そして、この回り道を除去し

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash Q}$$

という導出を得ることを、証明の正規化 (*normalization*) と呼ぶ。(ある結合子の除去の直後に同じ結合子の導入規則を使う、といった他の種類の回り道を考えることもあるが、本稿では、導入の直後に除去するタイプの回り道のみ議論する。)

この過程を，単純型付ラムダ計算の型付け関係の導出に移してみると

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M_1 : S} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash M_2 : T}}{\Gamma \vdash (M_1, M_2) : S * T} \text{T-PAIR}}{\Gamma \vdash \text{snd } (M_1, M_2) : T} \text{T-SND} \longrightarrow \Gamma \vdash M_2 : T$$

と捉えられる．導出は，結論に現れる項と実質同じなので，この図から項を取り出してみると，

$$\text{snd } (M_1, M_2) \longrightarrow M_2$$

となり，これは簡約規則である！

つまり，

論理	計算
$\vdots$	$\vdots$
証明の回り道	簡約基 (簡約規則の左辺のこと)
証明の正規化	簡約 (プログラムの実行)

という対応が得られる．

この対応は「かつ」と直積型だけに留まらない．例えば「ならば」に関する回り道は

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, x : S \vdash M[x] : T}}{\Gamma \vdash \text{fun } x : S \Rightarrow M[x] : S \rightarrow T} \text{T-ABS} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : S}}{\Gamma \vdash (\text{fun } x : S \Rightarrow M[x]) N : T} \text{T-APP}$$

という形である． T の証明が二段上の T-ABS の前提に現れているが，残念ながら二段上の証明は文脈が $x : S$ の分だけ違うので，「かつ」の場合と違い，この部分だけを切り出してきてもだめで，正規化は「かつ」の場合より複雑である．

以下， $\Gamma, x : S \vdash M[x] : T$ の導出を変形して， $x : S$ を取り除いた， $\Gamma \vdash \dots : T$ という結論の導出を作ること考える． $x : S$ を使うのは葉だけなので，葉から $x : S$ を除去できれば，導出木の全てから $x : S$ を取り除くことができる．さて，一般に，導出の「葉」は

$$\overline{\Gamma, x : S, \Gamma' \vdash y : S'} \text{T-VAR}$$

という形になっていることに注意しよう． x と y が異なる変数である場合， $x : S$ を型環境から除いた導出

$$\overline{\Gamma, \Gamma' \vdash y : S'} \text{T-VAR}$$

を作ることができる．一方， x と y が同じ変数である場合， $S = S'$ であることに注意すると，導出

$$\Gamma \vdash N : S$$

を元にして，型環境を水増ししたような導出

$$\Gamma, \Gamma' \vdash N : S$$

を作ると、型を変えずに、いずれの葉からも $x : S$ を取り除くことができる。

$$\frac{}{\Gamma, x : S, \Gamma' \vdash x : S} \text{T-VAR} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma, \Gamma' \vdash N : S$$

結局、 M の導出中の x を使っているところを N で置き換えたような導出が得られることになるが、これは代入 $M[N]$ で表すことができる!

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma, x : S \vdash M[x] : T} \text{T-ABS} \quad \Gamma \vdash N : S}{\Gamma \vdash (\text{fun } x : S \Rightarrow M[x]) N : T} \text{T-APP} \longrightarrow \Gamma \vdash M[N] : T$$

ここから項だけ取り出すと β 簡約になっている。

$$(\text{fun } x : S \Rightarrow M[x]) N \longrightarrow M[N]$$

また、「または」についての回り道 (のひとつ) は、

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash M : S_1} \text{T-LEFT} \quad \frac{\frac{}{\Gamma, x : S_1, \Gamma' \vdash x : S_1} \text{T-VAR} \quad \dots \quad \frac{}{\Gamma, x : S_1, \Gamma'' \vdash x : S_1} \text{T-VAR}}{\Gamma, x : S_1 \vdash N_1[x] : T} \quad \frac{}{\Gamma, y : S_2 \vdash N_2[y] : T}}{\Gamma \vdash \text{match left } M \text{ with left } x \Rightarrow N_1[x] \mid \text{right } y \Rightarrow N_2 \text{ end} : T} \text{T-SMATCH}$$

であり²、回り道の除去により、T-VAR を使った葉の部分に $\Gamma \vdash M : S_1$ の証明を継木 (代入) した

$$\frac{\frac{}{\Gamma, \Gamma' \vdash M : S_1} \quad \dots \quad \frac{}{\Gamma, \Gamma'' \vdash M : S_1}}{\Gamma \vdash N_1[M] : T}$$

を得ることができる。

これらのことから、「 A ならば B 」の証明は関数である、というのは「 A の証明を受け取ると B の証明を返す関数である」という意味であることがわかる。そして、「 A かつ B 」の証明は「 A の証明と B の証明の組」であり、「 A または B 」の証明は「left というタグのついた A の証明」もしくは「right というタグのついた B の証明」なのである。

5 全称量化と依存関数型

最後に全称量化に対応する計算体系の側の概念である依存関数型 (*dependent function type*) について、大雑把にふれておく。

全称量化 $\forall x : T, P$ に関する規則をよく見ると、「ならば」の規則とよく似ていることがわかる。実は、全称量化 $\forall x : T, P[x]$ の証明も「ならば」の証明が関数であるのと同様に関数であると考え

²T-VAR を使っているステップがふたつ現れているのは N_1 中に現れる x に対応している。一般にはふたつとは限らない。

ことができる。ただし、「ならば」の証明が証明を受け取る関数であるのとは違って「 T 型の値 M を受け取って $P[M]$ の証明を返す関数」となる。

依存関数型は、まず型情報を詳細化することから現れてくる。例えば、自然数リストの型情報にその長さ (要素の数) を含めることを考えてみる。つまり、

- `nil` の型は `natlist(0)`
- `cons 3 nil` の型は `natlist(1)`
- `cons 1 (cons 2 (cons 3 nil))` の型は `natlist(3)`

のような感じである。すると、0 を n 個並べたリストを返す関数 `makezeros` の型はどうなるだろうか。まず、引数の型は `nat` である。返り値の型はどうなるだろうか。 n を受け取った時の返り値は

$$\underbrace{\text{cons } 0 (\text{cons } 0 \dots (\text{cons } 0 \text{ nil}) \dots)}_n$$

なのだから、その型は引数の値によって異なる `natlist( $n$ )` になる。このような、引数の値に依存して返り値の型が変わる関数の型を表すのが依存関数型である。依存関数型は一般に

$$\Pi x : S. T[x]$$

という形をしており、引数 x の型が S で返り値の型が T である (ただし、 T には引数 x が現れる可能性がある) ことを表している。例えば、`makezeros` の型は

$$\Pi n : \text{nat}. \text{natlist}(n)$$

となる。

依存関数型 $\Pi x : S. T[x]$ を持つ関数を引数 $M : S$ に適用すると、その結果の型は $T[M]$ となる。例えば、

$$\begin{aligned} \text{makezeros } 3 &: \text{natlist } 3 \\ \text{makezeros } (n + m) &: \text{natlist}(n + m) \end{aligned}$$

などとなる。

単純な関数型 $S \rightarrow T$ は、実は依存関数型のうち、引数が返り値の型に現れない (返り値の型が引数に依存しない) 特殊ケースの略記である。例えば、自然数を二倍する関数 `double` の型は、 $\Pi n : \text{nat}. \text{nat}$ (つまり、自然数 n を受け取り、その値に関わらず自然数を返す、という意味である) とも考えられる。