ソフトウェア基礎論配布資料 (10)
π 計算

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科知能情報学専攻
e-mail: `igarashi@kuis.kyoto-u.ac.jp`

平成 17 年 1 月 18 日

1 π 計算—特徴

- 並列実行される**プロセス**(*process*) によるシステム記述
- 主要な計算ステップ: 通信チャネル (〜UNIX ソケット) を介してプロセス間通信
- 主要なデータ: (通信チャネルの) 名前 ($\sim$ URL)
- 新しい名前の生成と動的に変化する名前の有効範囲

1.1 概要

- $\mathbf{0}$ $\cdots$ 何もしない・実行終了プロセス
- $P_1 \mid P_2$ $\cdots$ プロセス P_1 と P_2 の並列実行
- $x![y].P$ $\cdots$ 通信チャネル x へ y を送信，送信後に P を実行
- $x?[z].P$ $\cdots$ 通信チャネル x からデータを受信，パラメータ z をそれに束縛して P を実行
- $\mathbf{new}\ x\ \mathbf{in}\ P$ $\cdots$ 新しい通信チャネル x を生成し P を実行
- $*P$ $\cdots$ P の無限コピー ($P \mid P \mid \cdots \mid P \mid \cdots$)
- $P_1 + P_2$ $\cdots$ 入出力 P_1 か P_2 の可能な通信のうちどちらかを実行

主要な計算規則:

$$x![y].P \mid x?[z].Q \longrightarrow P \mid [z \mapsto y]Q$$

非決定性:

$$\begin{array}{ccc}
x![y].P_1 \mid x![w].P_2 \mid x?[z].P_3 & \longrightarrow & P_1 \mid x![w].P_2 \mid [z \mapsto y]P_3 \\
\downarrow & & \\
x![y].P_1 \mid P_2 \mid [z \mapsto w]P_3 & &
\end{array}$$

new x **in** P について:

$$(\textbf{new}\ x\ \textbf{in}\ x![y].P) \mid x?[z].Q \quad \not\longrightarrow \quad P \mid [z \mapsto y]Q$$

また，**new** で束縛された名前が送受信対象になるとスコープの移動が発生する．P に y が現われないとすると，

$$\begin{array}{rcl}(\textbf{new}\ y\ \textbf{in}\ x![y].P \mid y?[w].Q) \mid x?[z].z![v].R & \longrightarrow & P \mid (\textbf{new}\ y\ \textbf{in}\ y?[w].Q \mid y![v].R') \\ & \longrightarrow & P \mid (\textbf{new}\ y\ \textbf{in}\ [w \mapsto v]Q \mid R')\end{array}$$

1.2 例

「1 足す」サーバ

$$\begin{array}{l}P \equiv *s?[n].r![n+1].\mathbf{0} \\ P \mid s![2].r?[x].Q \longrightarrow \cdots \longrightarrow ? \\ P \mid s![2].r?[x].Q \mid s![4].r?[y].R \longrightarrow \cdots \longrightarrow ?\end{array}$$

「1 足す」サーバ (改良版)

$$\begin{array}{l}P \equiv *s?[n,r].r![n+1].\mathbf{0} \\ P \mid (\textbf{new}\ r'\ \textbf{in}\ s![2,r'].r'?[x].Q) \longrightarrow \cdots \longrightarrow ?? \\ P \mid (\textbf{new}\ r_1\ \textbf{in}\ s![2,r_1].r_1?[x].Q) \mid (\textbf{new}\ r_2\ \textbf{in}\ s![4,r_2].r_2?[y].R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow ??\end{array}$$

点オブジェクト:

$$\begin{array}{lcl}P & \equiv & \textbf{new}\ \mathit{newp}\ \textbf{in} \\ & & \quad \mathit{newp}![0].\ \mid \\ & & \quad *\mathit{newp}?[n].(\mathit{get}?[r].r![n].\mathit{newp}![n].\mathbf{0} + \mathit{set}?[n',r].r![].\mathit{newp}![n'].\mathbf{0}) \\ \multicolumn{3}{l}{P \mid (\textbf{new}\ r_1\ \textbf{in}\ \mathit{get}![r_1].r_1?[n].Q_1) \mid (\textbf{new}\ r_2\ \textbf{in}\ \mathit{set}![3,r_2].r_2?[].Q_2)}\end{array}$$

2 形式的定義

2.1 文法

プロセス P, Q, R と入出力ガード付きプロセス G は以下の文法で定義される．

$$\begin{array}{rcl}P & ::= & \mathbf{0} \mid (P \mid P) \mid \textbf{new}\ x\ \textbf{in}\ P \mid *P \mid G_1 + \cdots + G_n \\ G & ::= & \#^i x![\#^{i_1} y_1, \ldots, \#^{i_n} y_n].P \mid \#^i x?[y_1, \ldots, y_n].P\end{array}$$

2.2 簡約関係

- 通信を起こすプロセスが，必ずしも項の構造の中で近くにあるわけではない．
- λ 計算のように局所的な計算のみを表現した簡約+ 通信するプロセスが「近く」に来る「配置換え」を許すようなプロセス間の等価関係

2.2.1 定義: 構造的合同関係 $P_1 \cong P_2$ を以下の規則で定義する．

$$P \cong P \qquad \text{(SC-Refl)}$$

$$\frac{P \cong Q}{Q \cong P} \qquad \text{(SC-Symm)}$$

$$\frac{P \cong Q \qquad Q \cong R}{P \cong R} \qquad \text{(SC-Trans)}$$

$$P \mid \mathbf{0} \cong P \qquad \text{(SC-Zero)}$$

$$P \mid Q \cong Q \mid P \qquad \text{(SC-Commut)}$$

$$P \mid (Q \mid R) \cong (P \mid Q) \mid R \qquad \text{(SC-Assoc)}$$

$$*P \cong *P \mid P \qquad \text{(SC-Rep)}$$

$$\textbf{new } x \textbf{ in } P \mid Q \cong \textbf{new } x \textbf{ in } (P \mid \Uparrow_x Q) \qquad \text{(SC-New)}$$

$$\frac{P \cong P' \qquad Q \cong Q'}{P \mid Q \cong P' \mid Q'} \qquad \text{(SC-Par)}$$

$$\frac{P \cong Q}{\textbf{new } x \textbf{ in } P \cong \textbf{new } x \textbf{ in } Q} \qquad \text{(SC-CNew)}$$

2.2.2 定義: 簡約関係 $P \longrightarrow Q$ を以下の規則で定義する.

$$\begin{gathered}\cdots + \#^i x![\#^{i_1} z_1, \ldots, \#^{i_n} z_n].P + \cdots \mid \cdots + \#^i x?[y_1, \ldots, y_n].Q + \cdots \longrightarrow \\ P \mid [y_1, \ldots, y_n \mapsto \#^{i_1} z_1, \ldots, \#^{i_n} z_n]Q\end{gathered} \qquad \text{(R-Com)}$$

$$\frac{P \longrightarrow Q}{P \mid R \longrightarrow Q \mid R} \qquad \text{(R-Par)}$$

$$\frac{P \longrightarrow Q}{\textbf{new } x \textbf{ in } P \longrightarrow \textbf{new } x \textbf{ in } Q} \qquad \text{(R-New)}$$

$$\frac{P \cong P' \qquad P' \longrightarrow Q' \qquad Q' \cong Q}{P \longrightarrow Q} \qquad \text{(R-SP)}$$

3 型システム

目的: 通信ミスマッチ, つまり送受信されるデータの数 (arity) の不一致を防ぐ.
チャネル型: arity 情報 + どんな値を送受信するかの情報

3.1 型，型付構文，型判断，型付け規則

$$\begin{array}{rcl} T & ::= & [T_1, \ldots, T_n] \qquad (n \geq 0) \\ P & ::= & \mathbf{0} \mid (P \mid P) \mid \textbf{new } x : T \textbf{ in } P \mid *P \mid G_1 + \cdots + G_n \\ G & ::= & \#^i x![\#^{i_1} y_1, \ldots, \#^{i_n} y_n].P \mid \#^i x?[y_1, \ldots, y_n].P \\ \Gamma & ::= & \bullet \mid \Gamma, x : T \end{array}$$

型判断: $\Gamma \vdash \#^i x : T$ と $\Gamma \vdash P$ ok
型付け規則:

$$\Gamma, x : T \vdash \#^0 x : T \qquad \text{(T-VAR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \#^n x : T}{\Gamma, x{:}T' \vdash \#^{n+1} x : T} \qquad \text{(T-WEAK1)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \#^n x : T \qquad x \not\equiv y}{\Gamma, y{:}T' \vdash \#^n x : T} \qquad \text{(T-WEAK2)}$$

$$\Gamma \vdash \mathbf{0} \text{ ok} \qquad \text{(T-ZERO)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \text{ ok} \qquad \Gamma \vdash Q \text{ ok}}{\Gamma \vdash P \mid Q \text{ ok}} \qquad \text{(T-PAR)}$$

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash P \text{ ok}}{\Gamma \vdash \textbf{new } x : T \textbf{ in } P \text{ ok}} \qquad \text{(T-NEW)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \text{ ok}}{\Gamma \vdash *P \text{ ok}} \qquad \text{(T-REP)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash G_1 \text{ ok} \qquad \cdots \qquad \Gamma \vdash G_n \text{ ok}}{\Gamma \vdash G_1 + \cdots + G_n \text{ ok}} \qquad \text{(T-CHOICE)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \#^i x : [T_1, \ldots, T_n] \qquad \Gamma \vdash \#^{i_1} z_1 : T_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma \vdash \#^{i_n} z_n : T_n \qquad \Gamma \vdash P \text{ ok}}{\Gamma \vdash \#^i x![\#^{i_1} z_1, \ldots, \#^{i_n} z_n].P \text{ ok}} \qquad \text{(T-OUT)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \#^i x : [T_1, \ldots, T_n] \qquad \Gamma, y_1 : T_1, \ldots, y_n : T_n \vdash P \text{ ok}}{\Gamma \vdash \#^i x?[y_1, \ldots, y_n].P \text{ ok}} \qquad \text{(T-IN)}$$

3.2 性質

3.2.1 定理 [Type Preservation]: $\Gamma \vdash P$ ok かつ $P \longrightarrow_v P'$ ならば, $\Gamma \vdash P'$ ok である.

3.2.2 定理 [No Immediate Communication Error]: $\Gamma \vdash P$ ok ならば,

$$P \cong \cdots + \#^i x![\#^{i_1} z_1, \ldots, \#^{i_n} z_n].P_1 + \cdots \mid \cdots + \#^i x?[y_1, \ldots, y_m].P_2 + \cdots \mid P_3$$

かつ $n \neq m$ であるような, $n, m, P_1, P_2, P_3, i, x, i_1, \ldots, i_n, z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m$ は存在しない.